

# IGLOO PAR TEMPS CALME ET SOUS UNE TEMPÊTE

Dans un milieu enneigé, trois explorateurs construisent autour d'eux un igloo de rayon intérieur  $R = 1$  m et d'épaisseur  $e = 30$  cm. La température extérieure est de  $T_{ext} = -7$  °C et l'igloo subit des échanges thermiques conducto-convectifs (coefficient  $h$ ) avec l'air extérieur et l'air intérieur à l'igloo.

On envisage deux cas : en pleine tempête et par temps calme.  
Données :

- Coeff. conducto-convectif extérieur par tempête  $h_{ext} = 100 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
- Coeff. conducto-convectif extérieur par temps calme  $h_{ext} = 8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
- Coeff. conducto-convectif intérieur  $h_{int} = 5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
- Conductivité thermique de la glace  $\lambda = 2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Puissance thermique irradiée par chaque explorateur  $\mathcal{P} = 80 \text{ W}$

1) Calculer la résistance thermique totale de l'igloo.

### Correction

On se place en régime permanent. On modélise l'igloo par une demi-sphère. On néglige la conduction thermique par le sol.

Puisque l'on est en régime permanent, le flux thermique est constant, égal au flux produit dans l'igloo.

$$\phi = 3\mathcal{P}$$

Par symétrie du système, le vecteur densité surfacique de flux ne dépend que de  $r$  et est dirigé selon  $\vec{e}_r$ . L'intégrale suivante porte sur une demi-sphère de rayon  $r \in [R; R + e]$ .

$$\phi = \iint \vec{j}_{th}(r) \cdot d\vec{S} = j_{th}(r) 2\pi r^2$$

On en déduit, par la loi de Fourier :

$$-2\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr} = \phi \Rightarrow -\frac{\phi}{2\pi \lambda} \frac{dr}{r^2} = dT$$

On en déduit le profil de température dans la glace ( $R_{ext} = R + e$ ) :

$$\mathbb{T}(r) = \mathbb{T}(R_{ext}) + \frac{\phi}{2\pi \lambda} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_{ext}} \right)$$

On en déduit la résistance thermique :

$$R_{th} = \frac{T(R) - T(R_{ext})}{\phi} = \frac{1}{2\pi \lambda} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R + e} \right) = 18,4 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

2) Déterminer l'expression puis calculer la température dans l'igloo.

### Correction

L'air extérieur impose :  $T(R_{ext}^+) = T_{ext} = -7$  °C.

Le flux conducto-convectif sur la paroi extérieure donne alors :

$$\phi = 3\mathcal{P} = 2\pi (R + e)^2 h_{ext} [T(R_{ext}^-) - T(R_{ext}^+)]$$

Ainsi,

$$T(R_{ext}^-) = T_{ext} + \frac{3\mathcal{P}}{2\pi (R + e)^2 h_{ext}} = \begin{cases} -6,77 \text{ °C} & (\text{tempête}) \\ -4,74 \text{ °C} & (\text{calme}) \end{cases}$$

On en déduit la température en  $R$  dans la glace.

$$T(R^+) = T(R_{ext}^-) + 3\mathcal{P} \cdot R_{th} = \begin{cases} -2,37 \text{ °C} & (\text{tempête}) \\ 0,23 \text{ °C} & (\text{calme}) \end{cases}$$

Le flux conducto-convectif sur la paroi intérieure donne alors :

$$\phi = 3\mathcal{P} = 2\pi R^2 h_{int} [T(R^-) - T(R^+)]$$

Ainsi,

$$T_{int} = T(R^-) = T(R^+) + \frac{3\mathcal{P}}{2\pi R^2 h_{int}} = \begin{cases} 5,27 \text{ °C} & (\text{tempête}) \\ 7,87 \text{ °C} & (\text{calme}) \end{cases}$$