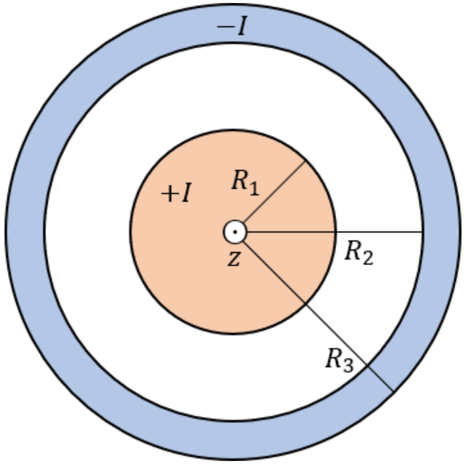
Champ magnétique créé par un câble coaxial

On considère un câble coaxial cylindrique d'axe $\vec{u}_z$, de longueur supposée infinie, constitué d'un conducteur central plein de rayon R_1, parcouru par un courant uniforme d'intensité I et d'un conducteur périphérique évidé, de rayon intérieur R_2, de rayon extérieur R_3 avec $R_1 < R_2 < R_3$ et parcouru par un courant uniforme également d'intensité I mais circulant en sens inverse par rapport au courant conducteur central.



1) Déterminer les densités de courant $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$ respectivement du conducteur central et du conducteur périphérique en fonction de I et des rayons.

Correction

Dans le conducteur central :

$$I = \vec{j}_1 \cdot \pi R_1^2 \vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{j}_1 = \frac{I}{\pi R_1^2}\vec{u}_z}$$

Dans le conducteur périphérique :

$$-I = \vec{j}_2 \cdot \pi \left(R_3^2 - R_2^2\right) \vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{j}_2 = -\frac{I}{\pi \left(R_3^2 - R_2^2\right)}\vec{u}_z}$$

2) Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(\mathrm{M})$ créé en tout point M de l'espace, en fonction entre autres de I.

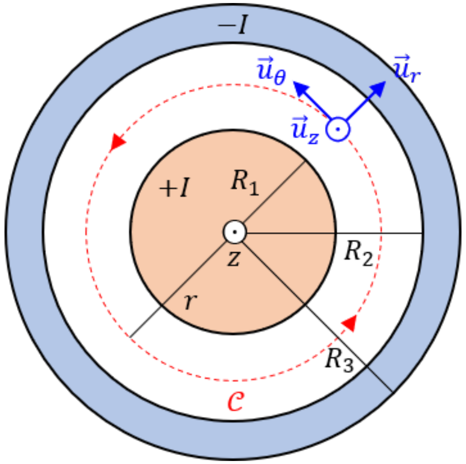
Correction

La distribution de courant est invariante par translation autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ et par rotation autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$. Donc $\vec{B}(\mathrm{M}) = \vec{B}(r)$.

Le plan $(\mathrm{M}, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant. Donc $\vec{B}$ est orthogonal à ce plan. Ainsi :

$$\boxed{\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{u}_\theta}$$

Schéma :



On applique le théorème de théorème d'Ampère sur un cercle d'axe $(\mathrm{O}z)$, de rayon r, et orienté de sorte que $\vec{d\ell} = r d\theta \vec{u}_\theta$.

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 I_{int}$$

Puisque l'intégrale porte sur la variable θ, le champ $\vec{B}(r)$ est constant et peut sortir de l'intégrale. Ainsi :

$$B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I_{int} \quad \text{avec :} \quad I_{int} = \begin{cases} j_1 \pi r^2 & \text{si : } 0 \leq r \leq R_1 \\ I & \text{si : } R_1 \leq r \leq R_2 \\ I + j_2 \pi \left(r^2 - R_2^2\right) & \text{si : } R_2 \leq r \leq R_3 \\ 0 & \text{si : } R_3 \leq r \end{cases}$$

En injectant les résultats de la question précédente, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}\,\overrightarrow{u_\theta} & \text{si : } 0 \leq r \leq R_1 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\overrightarrow{u_\theta} & \text{si : } R_1 \leq r \leq R_2 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\dfrac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\,\overrightarrow{u_\theta} & \text{si : } R_2 \leq r \leq R_3 \\ \overrightarrow{0} & \text{si : } R_3 \leq r \end{cases}}$$

3) Expliquer l'intérêt du câble coaxial par rapport à un fil simple parcouru par un courant de même intensité.

Correction

L'intérêt du câble coaxial est qu'il ne produit pas de champ magnétique à l'extérieur, contrairement à un fil simple.