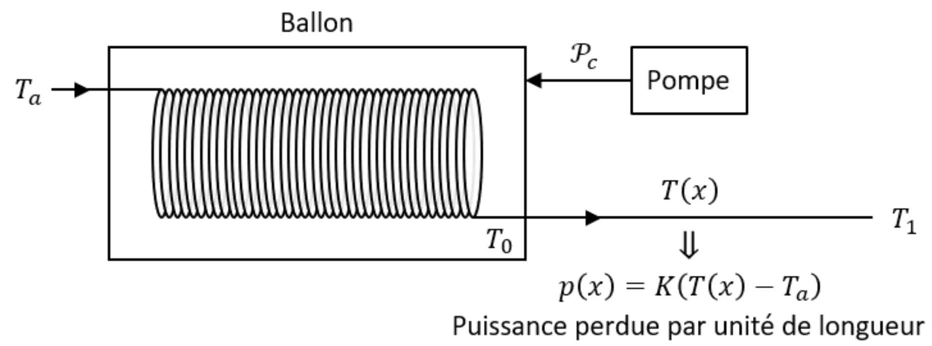
Débit optimum d'un réseau d'eau chaude

Un ballon d'eau chaude reçoit de l'eau à la température de l'air T_a et l'émet à une température T_0 dans un tuyau de longueur L. Ce tuyau conduit l'eau jusqu'à la salle de bain, où l'eau y arrive à une température T_1. Le ballon d'eau chaude est alimenté par une résistance électrique qui fournit une puissance thermique $\mathcal{P}_c$. Les transferts thermiques (puissance par unité de longueur de tuyau d'eau) avec l'extérieur sont de la forme $p = K\,(T(x) - T_a)$. L'objectif est de maximiser la température T_1.

On se placera en régime stationnaire, et on négligera les variations d'énergie cinétique et potentielle.

1) Faire un schéma.

Correction



2) Donner un sens au coefficient K.

Correction

$1/K$ est homogène à une résistance thermique par unité de longueur.

3) Argumenter physiquement pourquoi un débit d'eau trop grand ou trop faible ne répondrait pas aux objectifs.

Correction

Si le débit est trop grand, alors T_0 ne sera pas suffisamment élevé (la puissance de la pompe n'est pas infinie). Cas limite : si $D_m \to \infty$, alors $T_0 \to T_a$ donc $T_1 \to T_a$.

Si le débit est trop faible, alors les pertes thermiques dans le tuyau jusqu'à la salle de bain seront trop grande. Cas limite : si $D_m \to 0$, alors $T_1 \to T_a$.

4) Énoncer le premier principe industriel sous forme de puissance.

Correction

Premier principe industrielle sans variation d'énergie mécanique :

$$\boxed{D_m\,(h_s - h_e) = \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_u}$$

5) Appliquer le premier principe à deux systèmes bien choisis et déterminer le débit permettant de maximiser T_1. Que vaut alors T_1 dans le cas maximum ?

Correction

Premier principe dans le ballon :

$$D_m\,\Delta h = \mathcal{P}_c \quad \Rightarrow \quad D_m c\,(T_0 - T_a) = \mathcal{P}_c$$

Premier principe dans le tuyau de longueur dx :

$$D_m c\,(T(x+dx) - T(x)) = -p\;dx \quad \Rightarrow \quad D_m c\,\frac{dT}{dx} = -p = -K\,(T(x) - T_a)$$

où le signe « $-$ » fait du fait qu'on doit mettre des puissances **reçues** dans le premier principe.

Ainsi,

$$\frac{dT}{dx} + \frac{T}{\delta} = \frac{T_a}{\delta} \quad \text{avec :} \quad \delta = \frac{D_m c}{K}$$

La solution s'écrit :

$$T(x) = T_a + (T_0 - T_a)\,e^{-x/\delta} = T_a + \frac{\mathcal{P}_c}{D_m c}\,\exp\left(-\frac{Kx}{D_m c}\right)$$

La température de l'eau dan la salle de bain vaut donc :

$$T_1(D_m) = T_a + \frac{\mathcal{P}_c}{D_m c}\,\exp\left(-\frac{KL}{D_m c}\right)$$

On veut maximiser cette température. On cherche quand la dérivée s'annule.

$$\frac{dT_1}{dD_m} = 0 = -\frac{1}{D_m^2}\left[\frac{\mathcal{P}_c}{c} - \frac{\mathcal{P}_c KL}{D_m c^2}\right]\exp\left(-\frac{KL}{D_m c}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_m = \frac{LK}{c}}$$

Dans ce cas, T_1 vaut :

$$\boxed{T_1 = T_a + \frac{\mathcal{P}_c}{LK}\ e^{-1}}$$