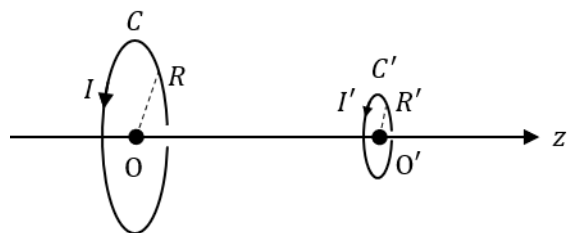


ATTRACTION D'UNE SPIRE PAR UNE AUTRE

On considère une spire C fixe circulaire de centre O de rayon R et d'axe vertical (Oz) , parcourue par un courant d'intensité I . Soit une seconde spire C' , mobile, de même axe Oz , de centre O' de rayon $R' \ll R$ est parcourue par un courant I' .

On suppose que R' est suffisamment faible pour que B_z , la composante selon l'axe z du champ magnétique créé par C en tout point de la surface C' , soit uniforme. Mathématiquement : soit A un point appartenant au disque de centre O' et de rayon R' , alors $B_z(A) = B_z(O')$.



Formulaire : en coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

1) Donner la forme du champ \vec{B} créé par C en M , un point quelconque de l'axe (Oz) .

Correction

On a invariance de la distribution de courant par rotation autour de l'axe Oz . Le champ magnétique ne dépend pas de la variable θ .

Soit M , un point quelconque de l'axe Oz . Tout plan passant par O et M est un plan d'anti-symétrie. On en déduit que \vec{B} appartient à l'intersection de tous ces plans. Donc :

$$\vec{B}(M) = B_z(z) \vec{u}_z$$

2) Donner la forme du champ \vec{B} créé par C en M , un point quelconque de l'espace.

Correction

On a toujours invariance de la distribution de courant par rotation autour de l'axe Oz . Le champ magnétique ne dépend pas de la variable θ .

Soit M , un point quelconque de l'espace. Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'anti-

symétrie. On en déduit que \vec{B} appartient à ce plan. Donc :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z$$

On ne peut rien dire de plus.

3) Utiliser l'équation de Maxwell-flux pour montrer qu'en A , un point appartenant au disque de centre O' et de rayon R' , on a :

$$B_r(A) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z(O')}{dz}$$

Correction

L'équation de Maxwell-flux donne :

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Or, d'après l'énoncé :

$$B_z(A) = B_z(O') \Rightarrow B_z(r, z) = B_z(z)$$

Donc B_z est une fonction uniquement de z , pas de r . Ainsi,

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{dB_z}{dz} \Rightarrow \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = -r \frac{dB_z}{dz}$$

On intègre :

$$rB_r = -\frac{r^2}{2} \frac{dB_z}{dz} + f(z) \Rightarrow B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} + \frac{f(z)}{r}$$

Or, d'après la première question, $B_r(r=0, z) = 0$. Donc :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$$

4) Retrouver la forme intégrale de l'équation de Maxwell-flux à partir de sa forme locale et en donner une interprétation physique.

Correction

On a :

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \iiint \operatorname{div}(\vec{B}) \, dV = 0 \Rightarrow \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Le flux de \vec{B} à travers un contour fermé est nul, ie. \vec{B} est à flux conservatif. Donc il n'existe pas de monopole magnétique.

5) Montrer que la spire C' tend à se rapprocher de la spire fixe C . Calculer la résultante de la force s'exerçant sur C' .

Correction

Un élément de longueur $d\vec{\ell}$ de C' subit la force de Laplace :

$$d\vec{F} = I' d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I' R' d\theta \vec{u}_\theta \wedge (B_z(R', z) \vec{u}_r + B_z(z) \vec{u}_z)$$

On en déduit :

$$d\vec{F} = I' R' d\theta (-B_z(R', z) \vec{u}_z + B_z(z) \vec{u}_r)$$

La composante selon $-\vec{u}_z$ tant à faire rapprocher la spire. Les composantes selon \vec{u}_r vont s'annuler 2 à 2 (θ et $\theta + \pi$) donc leur résultante est nulle. Ainsi, la force totale subit par la spire vaut :

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} -I' R' d\theta B_z(R', z) \vec{u}_z = -I' R' 2\pi B_z(R', z) \vec{u}_z$$

Avec la question 3 :

$$\vec{F} = I' (R')^2 \pi \frac{dB_z}{dz} \vec{u}_z$$

6) Vérifier que cette force dérive d'une énergie potentielle.

Correction

On a bien :

$$\vec{F} = -\frac{d}{dz} \left(-I' (R')^2 \pi B_z(z) \right) \vec{u}_z = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dz} \vec{u}_z$$

Remarque :

$$\mathcal{E}_p = -I' (R')^2 \pi B_z(z) = -\vec{\mu}' \cdot \vec{B} \quad \text{avec : } \vec{\mu}' = I' \vec{S}'$$

$\vec{\mu}'$ le moment magnétique de C' .