Ligne dipolaire

On considère un fil infini de densité linéique de charge λ uniforme.

1) Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ créé en tout point M de l'espace.

Correction

On se place en coordonnées cylindres $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$. Soit un point $\mathrm{M} = (r, \theta, z)$ quelconque de l'espace.

La distribution de charge est invariante par translation selon $\overrightarrow{u_z}$ et par rotation autour de $(\mathrm{O}z)$. Donc le champ électrique l'est également.

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{E}(r)$$

Le plans $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Donc $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ appartient à l'intersection de ces plans.

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = E(r)\,\overrightarrow{u_r}$$

On prend comme surface de Gauss un cylindre de hauteur h et de rayon r. Sa surface se décompose en trois parties : supérieure $\overrightarrow{dS_{sup}} = dS\,\overrightarrow{u_z}$, inférieure $\overrightarrow{dS_{inf}} = -dS\,\overrightarrow{u_z}$ et latérale $\overrightarrow{dS_{lat}} = dS\,\overrightarrow{u_r}$.

Le théorème de Gauss assure que :

$$\oiint \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \underbrace{\iint_{S_{sup}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS_{sup}}}_{=\ 0 \text{ car } \overrightarrow{E}\,\perp\,\overrightarrow{dS_{sup}}} + \underbrace{\iint_{S_{inf}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS_{inf}}}_{=\ 0 \text{ car } \overrightarrow{E}\,\perp\,\overrightarrow{dS_{inf}}} + \iint_{S_{lat}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS_{lat}} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

On rappelle que la surface latérale du cylindre vaut : $S_{lat} = 2\pi r h$

$$E(r) = \frac{\lambda h}{2\pi r h \varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_r}}$$

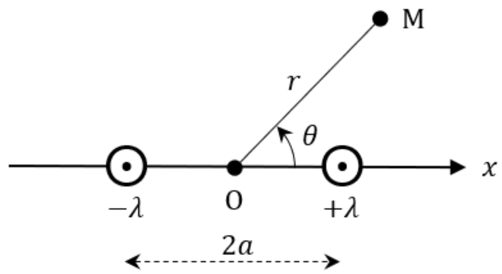
2) En déduire le potentiel $V(\mathrm{M})$ créé en tout point M de l'espace.

Correction

On a :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) \quad\Rightarrow\quad E(r) = -\frac{dV}{dr} \quad\Rightarrow\quad \boxed{V(\mathrm{M}) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + cte}$$

3) Déterminer à l'aide de ce qui précède (sans appliquer de nouveau le théorème de Gauss) le potentiel $V(\mathrm{M})$ créé en tout point M de l'espace par deux fils infinis situés en $x = \pm a$, de densité linéique de charge $\pm\lambda$ uniforme, en fonction de r et θ.



Correction

On note N (respectivement P) le point d'intersection entre la ligne chargée $-\lambda$ (respectivement $+\lambda$) et l'axe $(\mathrm{O}x)$.

On reprend le résultat de la question précédente et on applique le théorème de superposition :

$$V_{tot}(\mathrm{M}) = V_+(\mathrm{M}) + V_-(\mathrm{M}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln(\mathrm{NM}) - \ln(\mathrm{PM})\Big]$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathrm{NM}^2 &= \overrightarrow{\mathrm{NM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NM}} \\
&= \left(\overrightarrow{\mathrm{NO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{NO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \\
&= (a\,\overrightarrow{u_x} + r\,\overrightarrow{u_r})\cdot(a\,\overrightarrow{u_x} + r\,\overrightarrow{u_r}) \\
&= a^2 + r^2 + 2ar\cos(\theta)
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathrm{PM}^2 &= \overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PM}} \\
&= \left(\overrightarrow{\mathrm{PO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{PO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \\
&= (-a\,\overrightarrow{u}_x + r\,\overrightarrow{u}_r) \cdot (-a\,\overrightarrow{u}_x + r\,\overrightarrow{u}_r) \\
&= a^2 + r^2 - 2ar\ \cos(\theta)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{V_{tot}(\mathrm{M}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ \ln\left(\frac{a^2 + r^2 + 2ar\ \cos(\theta)}{a^2 + r^2 - 2ar\ \cos(\theta)}\right)}$$

4) Dans le cadre de l'approximation dipolaire$r \gg a$. Montrer qu'à l'ordre le plus bas en a/r, le potentiel s'écrit :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{\lambda a\ \cos(\theta)}{\pi r \varepsilon_0}$$

Correction

Donc en travaillant au premier ordre en a/r, on a :

$$\mathrm{NM} = r\left(1 + \frac{2a}{r}\cos(\theta) + \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2} \simeq r\left(1 + \frac{a}{r}\cos(\theta)\right)$$

Soit finalement,

$$\ln(\mathrm{NM}) \simeq \ln(r) + \frac{a}{r}\cos(\theta)$$

De même :

$$\ln(\mathrm{PM}) \simeq \ln(r) - \frac{a}{r}\cos(\theta)$$

Conclusion :

$$\boxed{V_{tot}(\mathrm{M}) = \frac{\lambda a\ \cos(\theta)}{\pi r \varepsilon_0}}$$