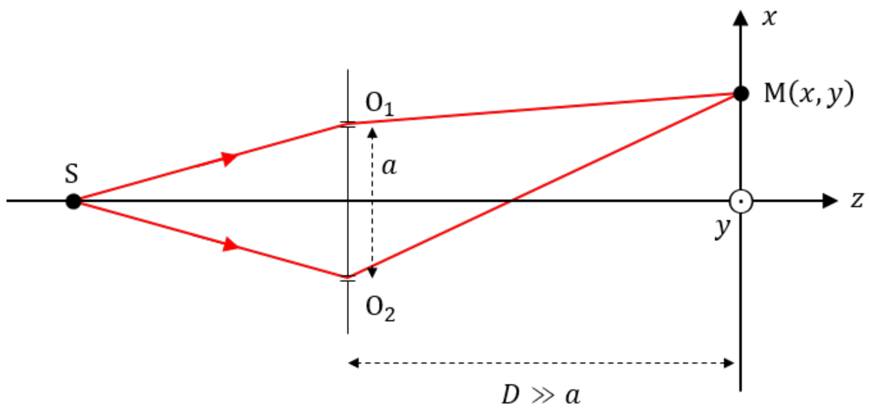
Trous d'Young éclairés par un doublet spectral

On considère une source dont le spectre est formé de deux raies très rapprochées. On considérera chacune des raies comme monochromatique, et de même intensité. On prendra les valeurs numériques de la lampe à vapeur de sodium, pour laquelle $\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm.

On souhaite prédire la figure d'interférence produite sur un écran si on utilise le dispositif des trous d'Young, espacés de a. L'observation se fait sur un écran placé à une distance $D \gg a$ des trous.

On pose :

$$\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$



<u>Formulaire</u> :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\,\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

1) Qu'est ce qui permet d'affirmer que les ondes issues de la raie 1 et celles issues de la raie 2 ne vont pas interférer entre elles ?

Correction

Les sources ne sont pas synchrones (pas la même longueur d'onde, donc pas la même pulsation). Elles sont donc incohérentes.

2) Déterminer l'intensité I_1 qui serait observée sur l'écran si la source avait été monochromatique de longueur d'onde λ_1.

Correction

Pour la démonstration, on calcule la différence de marche soit par un développement limité (c'est plus long...), soit par le théorème de Malus (à privilégier). Je donne les deux démonstrations ci-dessous.

Méthode avec développement limité

Par définition :

$$\delta = (\mathrm{O_2M}) - (\mathrm{O_1M})$$

avec :

$$\begin{aligned}(\mathrm{O_2M}) &= \sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}\\ &= D\sqrt{1+\left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2}\\ &\simeq D\left[1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right]\end{aligned}$$

et :

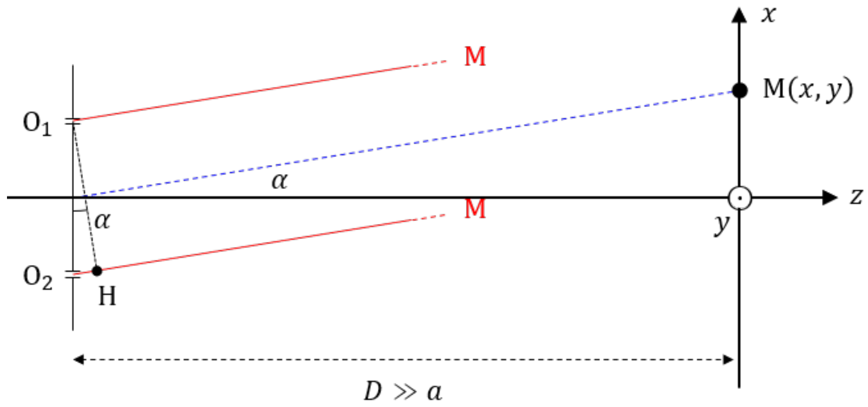
$$\begin{aligned}(\mathrm{O_1M}) &= \sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}\\ &= D\sqrt{1+\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2}\\ &\simeq D\left[1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right]\end{aligned}$$

Après simplification :

$$\boxed{\delta = \frac{ax}{D}}$$

Méthode avec théorème de Malus

Puisque $D \gg a$, les rayons lumineux sont quasi-parallèles en sortie des trous d'Young.



On note α cet angle. En utilisant le rayon bleu, on a :

$$\tan(\alpha) \simeq \alpha = \frac{x}{D}$$

D'après le théorème de Malus :

$$\delta = (O_2H) = a\,\sin(\alpha) \simeq a\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = \frac{ax}{D}}$$

Bilan

$$\boxed{I_1(x) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\frac{ax}{D}\right)\right)}$$

3) À l'aide d'une approximation que l'on précisera, exprimer le produit $\lambda_1\lambda_2$ en fonction de λ_m uniquement.

Correction

On a :

$$\lambda_1\lambda_2 = \left(\lambda_m - \frac{\Delta\lambda}{2}\right)\left(\lambda_m + \frac{\Delta\lambda}{2}\right) = \lambda_m^2 - \left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2$$

En remarquant que $\Delta\lambda \ll \lambda_m$, on a donc :

$$\boxed{\lambda_1\lambda_2 \simeq \lambda_m^2}$$

4) Montrer que l'intensité totale I_{tot} observée sur l'écran vaut :

$$I_{tot} = 4I_0\left[1+\cos\left(\frac{\pi\,\Delta\lambda\,ax}{\lambda_m^2 D}\right)\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_m D}\right)\right]$$

Correction

On a la même formule pour I_2, intensité qui serait observée sur l'écran si la source avait été monochromatique de longueur d'onde λ_2.

$$\boxed{I_2(x) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}\frac{ax}{D}\right)\right)}$$

Les deux longueurs d'onde sont incohérentes, on somme donc les intensités. Avec le formulaire, on obtient après simplification :

$$\boxed{I_{tot} = I_1 + I_2 = 4I_0\left[1+\underbrace{\cos\left(\frac{\pi\,\Delta\lambda\,ax}{\lambda_m^2 D}\right)}_{\text{contraste}}\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_m D}\right)}_{\text{interférences}}\right]}$$

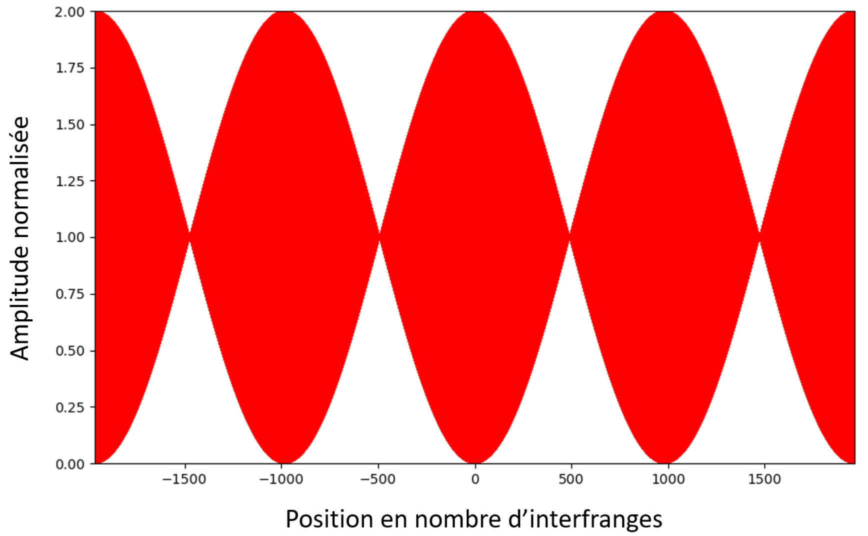
5) Déterminer la période spatiale des deux cosinus, notée T_i et T_c. En déduire que l'un d'eux s'interprète comme un terme d'interférences (i) et l'autre comme un facteur de contraste (c). Représenter alors schématiquement l'allure de $I_{tot}(x)$.

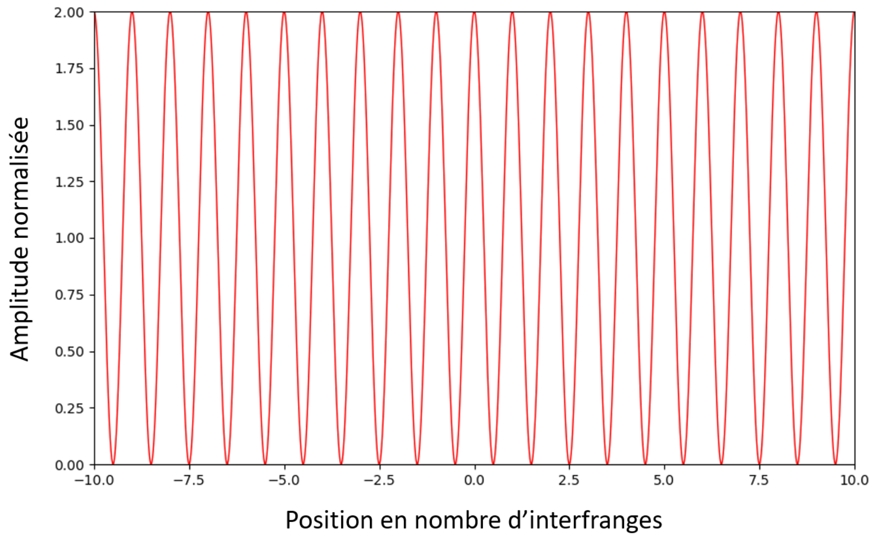
Correction

On a :

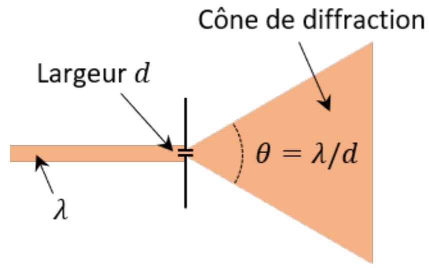
$$\boxed{T_i = \frac{\lambda_m D}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_c = \frac{2\lambda_m^2 D}{\Delta\lambda\,a} \gg T_i}$$

Le premier cosinus oscille très lentement : c'est le terme d'enveloppe / le terme de contraste. Le second cosinus oscille rapidement : c'est le terme d'interférences.





On rappelle qu'une fente de largeur d produit un cône de diffraction d'angle $\theta = \lambda/d$ (cf. schéma). Le cône de diffraction correspond à la largeur angulaire de la tâche principale, seule tâche ayant un bon contraste.



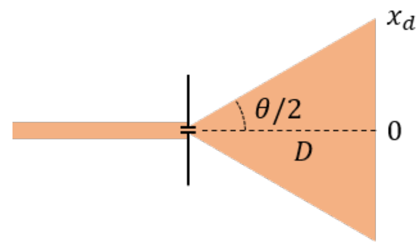
6) En utilisant une largeur $d = a/10$ pour chacune des fentes du dispositif, estimer la taille de la figure d'interférences sur l'écran et le nombre de franges observables. Qu'observe-t-on réellement sur l'écran ?

Correction

On constate que :

$$N_i = \frac{T_c/4}{T_i} = \frac{\lambda_m}{2\Delta\lambda} = 491 \text{ franges}$$

Il y a $N_i = 491$ franges entre le centre de la figure, où le contraste est excellent, et la position où le contraste s'annule du fait des interférences.



Or, la perte de contraste dû à la diffraction a lieu pour :

$$x_d = D\,\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \simeq \frac{D\theta}{2} = \frac{D\lambda_m}{2d} \quad \Rightarrow \quad N_d = \frac{x_d}{T_i} = \frac{a}{2d} = 5 \text{ franges}$$

Autrement dit, la perte de contraste par diffraction a lieu bien avant la perte de contraste par interférences. Expérimentalement, avec ce montage, tout se passe donc comme si la source était parfaitement monochromatique, de longueur d'onde λ_m.