

MODÈLE DE YUKAWA DE L'ATOME D'HYDROGÈNE

Le potentiel électrostatique $V(r)$ créé par un atome d'hydrogène (supposé à symétrie sphérique) peut être décrit par le potentiel de Yukawa :

$$V(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/a}}{r}$$

avec q_0 la charge élémentaire (que l'on ne note pas e pour ne pas confondre avec l'exponentielle).

1) Déterminer le champ électrostatique associé.

Correction

On a :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V) \Rightarrow \vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ar} \right) e^{-r/a} \vec{u}_r$$

2) Déterminer la charge $q(r)$ se trouvant à l'intérieur d'une sphère de rayon r .

Correction

On applique le théorème de Gauss sur une sphère de centre O et de rayon r . L'élément de surface vaut : $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$.

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$

On en déduit :

$$q(r) = q_0 \left(1 + \frac{r}{a} \right) e^{-r/a}$$

3) En déduire la présence d'une charge ponctuelle au centre du repère. Que modélise-t-elle? Calculer la charge totale contenue dans tout l'espace. Interpréter.

Correction

Lorsque $r \rightarrow 0$, $q \rightarrow q_0$. Il existe donc au centre une charge q_0 ponctuelle. Il s'agit du noyau (un proton) de l'atome d'hydrogène, supposé ponctuel.

La charge contenu dans tout l'espace est donnée par : $q(r = \infty) = 0$. L'atome est

globalement neutre (un proton et un électron).

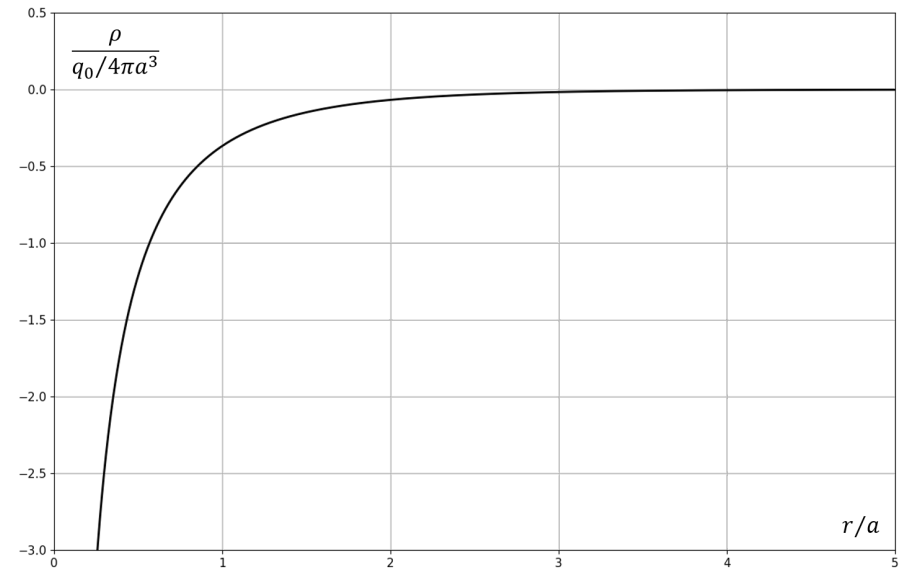
4) Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ et la tracer. Que représente physiquement a ?

Correction

On a :

$$dV = 4\pi r^2 dr \Rightarrow \rho(r) = \frac{dq}{dV} = \frac{q_0}{4\pi r^2} \frac{d}{dr} \left[\left(1 + \frac{r}{a} \right) e^{-r/a} \right] = -\frac{q_0}{4\pi a^2} \frac{e^{-r/a}}{r}$$

Graphe :



Pour $r \neq 0$, $\rho(r)$ représente la densité de charge de l'électron (car le proton est ponctuel en O). La densité de charge est bien en tout point négative et décroît exponentiellement vite, avec une distance caractéristique a .

Dans une approche quantique de l'atome, l'électron ne peut plus être décrit comme une particule ponctuelle parfaitement localisée en un point M mais par une fonction d'onde, qui traduit la probabilité de le détecter autour de M. La densité volumique

de probabilité de présence $\mathcal{P}(M)$ vaut :

$$\mathcal{P}(M) = \frac{\rho(M)}{-q_0} = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{e^{-r/a}}{r}$$

La probabilité de présence de l'électron est donc maximale proche du noyau et décroît exponentiellement vite, avec une distance caractéristique a . Cette distance représente donc la distance typique au-delà de laquelle il est très improbable de trouver l'électron. Il s'agit de la taille typique de l'orbitale $1s$ de l'atome d'hydrogène.