

UNE SOLUTION RÉALISTE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

On cherche une solution des équations de Maxwell dans le vide sous la forme :

$$\vec{E}(M,t) = f(z) e^{-t/\tau} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = g(z) e^{-t/\tau} \vec{u}_y$$

pour tout point M et tout instant t.

Cette solution présente l'intérêt physique d'être un signal réaliste, puisque limité dans le temps.

1) Montrer que les expressions précédentes satisfont les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.

Correction

On rappelle la divergence en coordonnées cartésiennes :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Ici, on a donc :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \text{div}(\vec{B}) = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

Les équations de Maxwell-Gauss ($\rho = 0$ dans le vide) et Maxwell-Thomson sont bien vérifiées.

2) En utilisant les autres équations de Maxwell, trouver les relations entre les fonctions f, g, f' et g'.

Correction

On rappelle le rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\text{rot}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

Maxwell-Faraday :

$$\text{rot}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{u}_y = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow f'(z) = \frac{g(z)}{\tau}$$

Maxwell-Ampère ($\vec{j} = \vec{0}$ dans le vide) :

$$\text{rot}(\vec{B}) = -\frac{\partial B_y}{\partial z} \vec{u}_x = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow g'(z) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\tau} f(z)$$

On impose que f(z) est paire, et que :

$$\vec{E}(z=0, t=0) = E_0 \vec{u}_x$$

3) En déduire les expressions des fonctions f(z) et g(z)

Correction

On dérive MF et on remplace g'(z) à l'aide de MA :

$$f''(z) = \frac{g'(z)}{\tau} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\tau^2} f(z) \Rightarrow f''(z) - \frac{f(z)}{\delta^2} = 0 \quad \text{avec} : \quad \delta = \frac{\tau}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c\tau$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$f(z) = A \text{ch}\left(\frac{z}{\delta}\right) + B \text{sh}\left(\frac{z}{\delta}\right)$$

La fonction est paire, donc B = 0. Et avec la condition initiale, on en déduit :

$$f(z) = E_0 \text{ch}\left(\frac{z}{\delta}\right)$$

Et ainsi,

$$g(z) = \tau f'(z) \Rightarrow g(z) = \frac{\tau E_0}{\delta} \text{sh}\left(\frac{z}{\delta}\right) = \frac{E_0}{c} \text{sh}\left(\frac{z}{\delta}\right)$$

4) Déterminer le vecteur de Poynting associé à cette solution.

Correction

Vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{f(z)g(z)}{\mu_0} e^{-2t/\tau} \vec{u}_z$$