Résolution à l'ordre k d'un réseau

Soit un réseau de pas a dont N traits sont éclairés à l'incidence i par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ. On note r l'angle de réfraction.

Formulaire :

$$\sin(\theta+\varepsilon) \simeq \sin(\theta) + \varepsilon\,\cos(\theta) \quad \text{avec :} \quad \varepsilon \ll 1 \text{ rad}$$

1) Déterminer l'angle d'émergence r à l'ordre k.

Correction

On utilise la formule des réseaux :

$$\sin(r) - \sin(i) = \frac{k\lambda}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin(r) = \sin(i) + \frac{k\lambda}{a}}$$

La source est en réalité un doublet, c'est-à-dire qu'elle émet à 2 longueurs d'onde très proches λ et $\lambda + \Delta\lambda$.

2) À l'ordre k, et sous incidence i, quelle est la séparation angulaire Δr, correspondant à cette séparation en longueur d'onde.

Correction

Avec le formulaire, on en déduit :

$$\begin{aligned}
& \sin(r+\Delta r) = \sin(i) + \frac{k\,(\lambda+\Delta\lambda)}{a} \\
\Rightarrow\ & \sin(r) + \Delta r\,\cos(r) \simeq \sin(i) + \frac{k\lambda}{a} + \frac{k\Delta\lambda}{a} \\
\Rightarrow\ & \Delta r\,\cos(r) \simeq \frac{k\Delta\lambda}{a} \\
\Rightarrow\ & \boxed{\Delta r \simeq \frac{k\Delta\lambda}{a\,\cos(r)}}
\end{aligned}$$

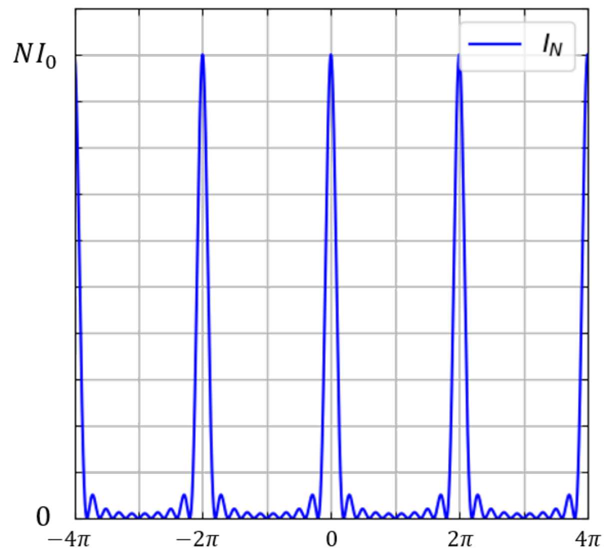
On rappelle que l'éclairement diffracté par un réseau est donné par :

$$I(\phi) = A^2\left(\frac{\sin(N\phi/2)}{\phi/2}\right)^2 \quad \text{avec :} \quad \phi = \frac{2\pi}{\lambda}a\Big[\sin(r) - \sin(i)\Big]$$

3) Tracer $I(\phi)$.

Correction

Graphe (pour $N = 10$) :



4) Soit la longueur d'onde λ. Calculer la déviation angulaire δr, correspondant à un déphasage $\delta\phi$, nécessaire pour passer du pic d'ordre k à son premier minimum nul.

Correction

Le pic d'ordre k a lieu pour : $\phi = 2\pi k$. Le premier minimum nul après ce pic a lieu pour : $\phi + \delta\phi = 2\pi k + \dfrac{2\pi}{N}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \phi + \delta\phi = 2\pi k + \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{\lambda}a\Big[\sin(r+\delta r) - \sin(i)\Big] \\
\Rightarrow\ & 2\pi k + \frac{2\pi}{N} \simeq \frac{2\pi}{\lambda}a\Big[\sin(r) + \delta r\,\cos(r) - \sin(i)\Big] \\
\Rightarrow\ & \frac{2\pi}{N} \simeq \frac{2\pi}{\lambda}a\ \delta r\,\cos(r) \\
\Rightarrow\ & \boxed{\delta r \simeq \frac{\lambda}{Na\,\cos(r)}}
\end{aligned}$$

On rappelle que deux raies sont discernables si leur écart angulaire Δr est supérieur à l'écart les séparant de leur premier 0 adjacent, soit $\Delta r > \delta r$.

5) Montrer que ce critère est respecté lorsque $\Delta\lambda > \Delta\lambda_{min}$, où $\Delta\lambda_{min}$ est à exprimer

en fonction de λ, N et k. En déduire l'expression du pouvoir de résolution théorique du réseau défini par :

$$P_r = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}}$$

Conclure.

Correction

On veut :

$$\Delta r > \delta r \;\Rightarrow\; \frac{k\Delta\lambda}{a\,\cos(r)} > \frac{\lambda}{Na\,\cos(r)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\lambda > \frac{\lambda}{Nk} = \Delta\lambda_{min}}$$

On en déduit immédiatement :

$$\boxed{P_r = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}} = Nk}$$

Pour résoudre deux raies proches, il faut soit éclairer beaucoup de fentes, soit monter dans les ordres élevés.