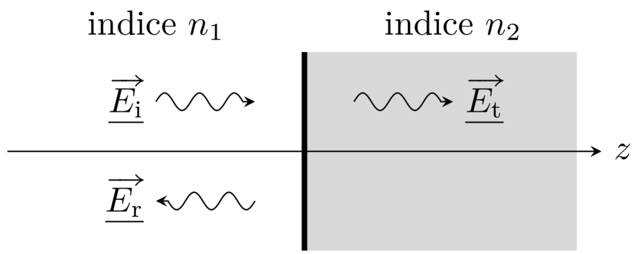
Réflexion à l'interface entre deux milieux

L'objectif de cet exercice est d'étudier la réflexion d'une onde électromagnétique entre deux milieux isolants parfaitement transparents (verre, eau, plexiglas, etc.). De tels milieux sont appelés milieux diélectriques. La propagation des ondes électromagnétiques y obéit exactement aux mêmes relations que dans le vide, à condition de remplacer la célérité c par c/n, où n est l'indice optique du milieu.

Dans un milieu d'indice n_1, on envoie une onde incidente de la forme :

$$\underline{\vec{E}_i}(z,t) = E_0 \ e^{i(\omega t - k_1 z)} \vec{u}_x$$

En $z = 0$ se trouve une interface avec un milieu d'indice n_2.



Lorsque l'onde incidente l'atteint, elle est partiellement réfléchie et partiellement transmise. On cherche les ondes transmise et réfléchie sous la forme :

$$\underline{\vec{E}_r}(z,t) = \underline{r} \ E_0 \ e^{i(\omega t + k_1 z)} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}_t}(z,t) = \underline{t} \ E_0 \ e^{i(\omega t - k_2 z)} \vec{u}_x$$

Les constantes r et t sont appelées coefficient de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique.

On donne les relations de passage à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \ \vec{n}_{1\to 2} \quad \text{et} \quad \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) \wedge \vec{n}_{1\to 2} = -\mu_0 \ \vec{j}_s$$

où σ et $\vec{j}_s$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface, et $\vec{n}_{1\to 2}$ le vecteur unitaire normal dirigé de 1 vers 2.

1) Exprimer k_1 et k_2 en fonction notamment de la pulsation et des indices optiques.

Correction

La relation de dispersion donne pour le milieu $i = 1, 2$:

$$\boxed{k_i = \frac{\omega}{c/n_i} = \frac{n_i \omega}{c}}$$

2) Justifier les expressions des ondes transmise et réfléchie. Quelles sont les hypothèses permettant de les écrire sous cette forme ?

Correction

Ces expressions sont cohérents du point de vue la direction de propagation (z croissants pour l'onde incidente et l'onde transmise, z décroissants pour l'onde réfléchie), ainsi que pour l'utilisation de k_1 et k_2.

Les hypothèses implicites sous-entendues par ces écritures sont la conservation de la pulsation (toujours vrai) et de la conservation de la polarisation (cas particulier de l'incidence normale, faux en incidence quelconque).

3) Écrire les relations de passage en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en admettant qu'il n'y a pas courant de surface. Que vaut σ ?

Correction

Ici :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}_2} = \underline{\vec{E}_t}(z=0,t) = \underline{t} \ E_0 \ e^{i\omega t} \vec{u}_x \\ \underline{\vec{E}_1} = \underline{\vec{E}_i}(z=0,t) + \underline{\vec{E}_r}(z=0,t) = E_0 \, (1 + \underline{r}) \, e^{i\omega t} \vec{u}_x \\ \vec{n}_{1\to 2} = \vec{u}_z \end{cases}$$

La relation de passage sur le champ électrique implique donc que :

$$E_0 \, (\underline{t} - 1 - \underline{r}) \, e^{i\omega t} \vec{u}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \ \vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ \sigma = 0 \end{cases}}$$

Avec la relation de structure, on calcule le champ magnétique :

$$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{B_i}} = \dfrac{\overrightarrow{u_z} \wedge \underline{\overrightarrow{E_i}}}{c/n_1} = \dfrac{n_1 E_0}{c}\ e^{i(\omega t - k_1 z)} \overrightarrow{u_y} \\ \underline{\overrightarrow{B_r}} = \dfrac{-\overrightarrow{u_z} \wedge \underline{\overrightarrow{E_r}}}{c/n_1} = -\dfrac{n_1 \underline{r} E_0}{c}\ e^{i(\omega t + k_1 z)} \overrightarrow{u_y} \\ \underline{\overrightarrow{B_t}} = \dfrac{\overrightarrow{u_z} \wedge \underline{\overrightarrow{E_t}}}{c/n_2} = \dfrac{n_2 \underline{t} E_0}{c}\ e^{i(\omega t - k_2 z)} \overrightarrow{u_y} \end{cases}$$

Ici :

$$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{B_2}} = \underline{\overrightarrow{B_t}}(z=0,t) = \dfrac{n_2 \underline{t} E_0}{c}\ e^{i\omega t} \overrightarrow{u_y} \\ \underline{\overrightarrow{B_1}} = \underline{\overrightarrow{B_i}}(z=0,t) + \underline{\overrightarrow{B_r}}(z=0,t) = \dfrac{n_1 E_0}{c}\,(1-\underline{r})\, e^{i\omega t} \overrightarrow{u_y} \end{cases}$$

La relation de passage sur le champ électrique implique donc que :

$$\frac{E_0}{c}\Big(n_2\ \underline{t} - n_1\,(1-\underline{r})\Big) e^{i\omega t} \overrightarrow{u_y} \wedge \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_1\,(1-\underline{r}) = n_2\ \underline{t}}$$

4) En déduire les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction des indices des deux milieux.

Correction

On combine le deux relations :

$$\underline{t} = 1 + \underline{r} = \frac{n_1}{n_2}\,(1-\underline{r}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2n_1}{n_1+n_2}}$$

5) Exprimer la moyenne temporelle des vecteurs de Poynting incident, réfléchi et transmis.

Correction

Pour l'onde transmise :

$$\boxed{\left\langle \overrightarrow{\Pi_t} \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\ \mathcal{R}e\left(\underline{\overrightarrow{E_t}} \wedge \underline{\overrightarrow{B_t}}^*\right) = n_2\,|t|^2\,\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\overrightarrow{u_z}}$$

On a de même :

$$\boxed{\left\langle \overrightarrow{\Pi_i} \right\rangle = n_1 \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\overrightarrow{u_z}} \quad \text{et} \quad \boxed{\left\langle \overrightarrow{\Pi_r} \right\rangle = -n_1\,|r|^2\,\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\overrightarrow{u_z}}$$

6) Par analogie, définir un coefficient de réflexion R et de transmission T en énergie à l'interface. Les calculer. Que vaut la somme des deux coefficients ? Interpréter physiquement.

Correction

Le coefficient de réflexion en énergie peut être défini par la relation :

$$\left\langle \overrightarrow{\Pi_r} \right\rangle = -R\ \left\langle \overrightarrow{\Pi_i} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = |r|^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2}$$

Le signe $-$ permettant de traduire la réflexion de l'énergie, qui se propage en sens inverse.

De même, le coefficient de transmission en énergie est défini par :

$$\left\langle \overrightarrow{\Pi_t} \right\rangle = T\ \left\langle \overrightarrow{\Pi_i} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{n_2}{n_1}\ \ |t|^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2}}$$

La somme des deux coefficients vaut :

$$\boxed{R + T = \frac{(n_1-n_2)^2 + 4n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2} = 1}$$

Physiquement, cette relation traduit la conservation de l'énergie : toute l'énergie incidente est ou bien réfléchie, ou bien transmise. C'est normal car on a considéré qu'il n'y avait pas de courant de surface, donc pas d'effet Joule !