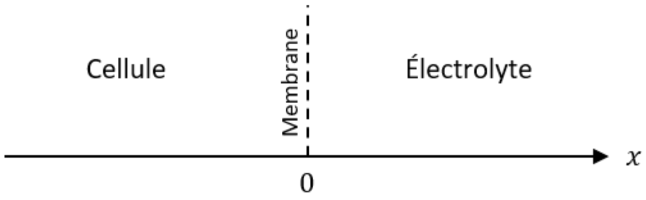
Champ électrique dans une membrane cellulaire

Une membrane cellulaire est assimilée au plan (yOz) où l'axe (Ox) est orienté vers l'extérieur de la cellule. Toutes les grandeurs physiques sont supposées ne dépendre que de l'abscisse x.



Une micro-électrode relevant l'évolution du potentiel à la traversée de la membrane que le potentiel $V(x)$ vaut :

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{si : } x \leq 0 \\ -V_0 \; e^{-x/a} & \text{si : } x > 0 \end{cases}$$

où V_0 est une constante positive homogène à un potentiel et où a est une distance.

1) Calculer le champ électrique en tout point.

Correction

On a :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\frac{dV}{dx}\overrightarrow{u_x} = \begin{cases} \overrightarrow{0} & \text{si : } x \leq 0 \\ -\dfrac{V_0}{a} \; e^{-x/a} \; \overrightarrow{u_x} & \text{si : } x > 0 \end{cases}}$$

2) Déterminer la densité volumique de charge ρ en tout point.

Correction

L'équation de Maxwell-Gauss donne :

$$\text{div}\left(\overrightarrow{E}\right) = \frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \begin{cases} 0 & \text{si : } x \leq 0 \\ \dfrac{\varepsilon_0 V_0}{a^2} \; e^{-x/a} & \text{si : } x > 0 \end{cases}}$$

3) Comment une densité volumique de charge peut-elle exister dans un liquide ? Quels sont les porteurs de charge présents ?

Correction

En solution, il y a des anions et des cations. La solution est globalement neutre mais peut, sous l'effet d'un champ électrique, devenir localement chargée.

On rappelle la relation de passage à une interface :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \; \overrightarrow{n}_{1\to 2}$$

4) Déterminer la densité surfacique de charge σ présente sur la surface d'équation $x = 0$.

Correction

La relation de passage assure que :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \; \overrightarrow{n}_{1\to 2} \quad \text{avec : } \begin{cases} \overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{E}(x = 0^+) = -\dfrac{V_0}{a}\overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{E}(x = 0^-) = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{n}_{1\to 2} = \overrightarrow{u_x} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sigma = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{a}}$$

5) Calculer la charge totale contenue dans un cylindre d'axe (Ox) et de base S, s'étendant indéfiniment le long de l'axe (Ox) (de $-\infty$ à $+\infty$). Commenter ce résultat.

Correction

On applique le théorème de Gauss sur un cylindre de rayon R et compris entre les plans $x = 0^+$ et $x = +\infty$.

$$\boxed{Q_{int} = \varepsilon_0 \oiint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = -\varepsilon_0 E\left(0^+\right) S = \frac{\varepsilon_0 V_0 S}{a}}$$

Cette charge est positive. On retrouve bien que la solution est neutre car la charge de surface vaut : $Q_{surf} = \sigma S = -\dfrac{\varepsilon_0 V_0 S}{a}$.