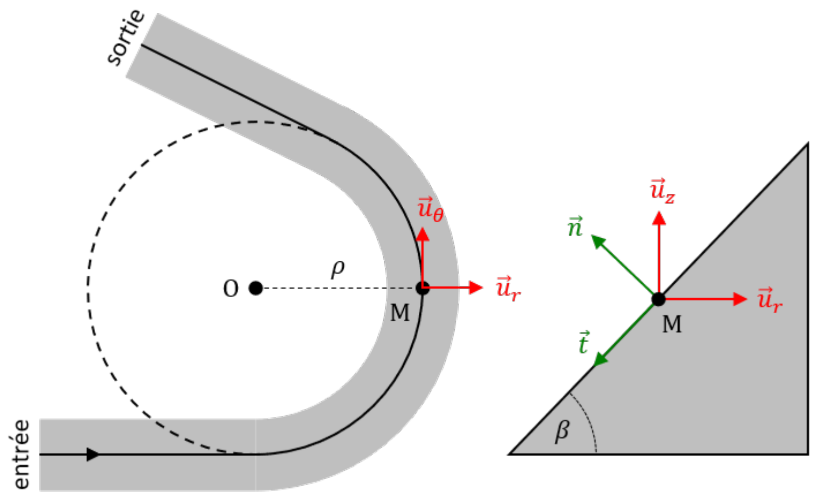
Bobsleigh en virage

On assimile un bobeur et son bobsleigh à un point matériel M de masse $m = 100$ kg glissant sur la glace. On note $f = 0{,}5$ le coefficient de frottement glace/bobsleigh suivant la direction perpendiculaire au bobsleigh. Coefficients de frottements statique et dynamique sont confondus. Les frottements dans la direction de la glisse sont négligés.

On considère un tronçon de piste circulaire (cf. schéma) de rayon ρ, dans lequel le bobeur circule à une vitesse v constante. La piste est inclinée par rapport à l'horizontale d'un angle β. La piste se situe dans un plan horizontal que l'on muni d'un repère cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ pour paramétrer le mouvement. Ainsi, le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = v\,\vec{u}_\theta$. On désigne par $\vec{R} = R_n\vec{n} + R_t\vec{t}$ la réaction de la piste ($\vec{n}$ et $\vec{t}$ sont des vecteurs unitaires).



Vue de dessus de la piste **Vue en coupe de la piste**

On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ du bobeur non-galiléen, en rotation uniforme par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen.

1) Exprimer l'accélération d'entraînement a du bobeur en fonction de v, ρ et d'un vecteur unitaire lors du virage.

Correction

Dans le virage à vitesse constante, le référentiel du bobeur $\mathcal{R}$ est en rotation uniforme par rapport au référentiel terrestre à la vitesse angulaire :

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{u}_z \quad \text{avec :} \quad \omega = \frac{v}{\rho}$$

Ainsi, l'accélération d'entraînement du référentiel vaut :

$$\boxed{\vec{a}_e = -\omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}} = -\omega^2\rho\,\vec{u}_r = -\frac{v^2}{\rho}\,\vec{u}_r}$$

2) Dans l'hypothèse d'un bobsleigh adhérent à la glace (dans la direction radiale), déterminer l'expression de la réaction de la piste en fonction de v, ρ, β, g et m.

Correction

Le PFD appliqué au bobeur dans $\mathcal{R}$ donne :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = -mg\,\cos(\beta) + R_n - \dfrac{mv^2}{\rho}\,\sin(\beta) \\ 0 = mg\,\sin(\beta) + R_t - \dfrac{mv^2}{\rho}\,\cos(\beta) \end{cases}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{R_n = mg\,\cos(\beta) + \frac{mv^2}{\rho}\,\sin(\beta) \quad \text{et} \quad R_t = -mg\,\sin(\beta) + \frac{mv^2}{\rho}\,\cos(\beta)}$$

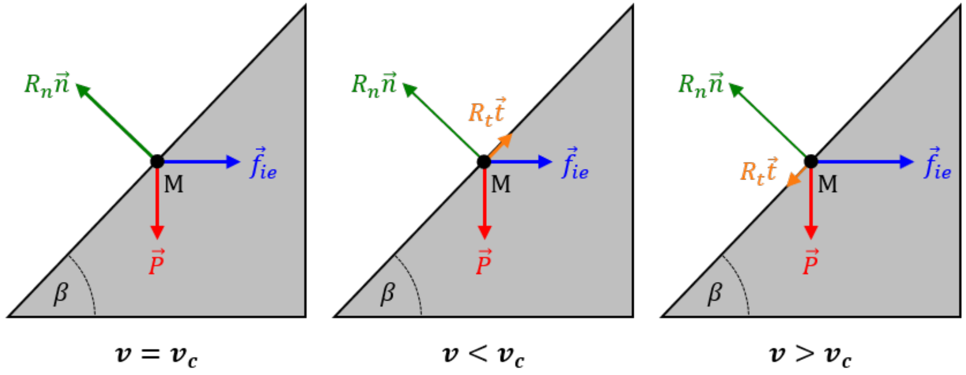
3) Quelle est la valeur v_c de la vitesse pour laquelle la réaction tangentielle est nulle ? Schématiser les forces qui s'appliquent au bobsleigh pour des valeurs proches mais supérieure ou inférieure à v_c. Dans quels cas le bobsleigh risque-t-il de glisser vers le bas ? vers le haut ?

Correction

Avec ce qui précède, on a immédiatement,

$$R_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_c = \sqrt{\rho g\,\tan(\beta)}}$$

Pour $v > v_c$ mais toujours en condition d'adhérence, la composante tangentielle est positive, c'est à dire vers le bas de la pente. À l'inverse, si $v < v_c$, la composante tangentielle est négative, c'est à dire dirigée vers le haut de la pente.



4) Montrer qu'il existe un angle β_1 en dessous duquel le bobsleigh ne dérape jamais vers le bas, quelle que soit sa vitesse. Déterminer β_1 numériquement.

Correction

Pour que le bobsleigh ne dérape jamais vers le bas quelle que soit sa vitesse, il faut en particulier qu'il ne dérape pas vers le bas à vitesse nulle ($v = 0$). Condition d'adhérence à vitesse nulle :

$$|R_t| \leq f\,|R_n| \quad \text{avec :} \quad v = 0 \quad \Rightarrow \quad mg\,\sin(\beta) \leq fmg\,\cos(\beta)$$

On en déduit donc :

$$\tan(\beta) \leq f \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta_1 = \arctan(f) \leq 27°}$$

5) Montrer qu'il existe un angle β_2 au dessus duquel le bobsleigh ne dérape jamais vers le haut, quelle que soit sa vitesse. Déterminer β_2 numériquement.

Correction

Pour que le bobsleigh ne dérape jamais vers le haut quelle que soit sa vitesse, il faut en particulier qu'il ne dérape pas vers le haut aux larges vitesses ($v \to \infty$). Condition d'adhérence à vitesse infinie :

$$|R_t| \leq f\,|R_n| \quad \text{avec :} \quad v \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{\rho}\,\cos(\beta) \leq f\,\frac{mv^2}{\rho}\,\sin(\beta)$$

On en déduit donc :

$$\tan(\beta) \geq \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta_2 = \arctan\left(\frac{1}{f}\right) \leq 63°}$$

6) On suppose $\beta = 45°$. Le pilote du bobsleigh s'apprête à prendre un virage de rayon de courbure $\rho = 10$ m. Dans quel intervalle de vitesse le bobeur peut-il prendre le virage pour ne pas déraper ?

Correction

Pour des trop faibles vitesses ($R_t < 0$), la condition pour que le bobeur ne dérape pas est :

$$|R_t| \leq f\,|R_n| \quad \Rightarrow \quad -R_t \leq fR_n$$

ce qui après calcul donne :

$$v^2 \geq \rho g\,\frac{-f + \tan(\beta)}{1 + f\,\tan(\beta)} = \rho g\,\tan(\beta - \beta_1)$$

Pour des trop fortes vitesses ($R_t > 0$), la condition pour que le bobeur ne dérape pas est :

$$|R_t| \leq f\,|R_n| \quad \Rightarrow \quad R_t \leq fR_n$$

ce qui après calcul donne :

$$v^2 \leq \rho g\,\frac{f + \tan(\beta)}{1 - f\,\tan(\beta)} = \rho g\,\tan(\beta + \beta_1)$$

Bilan :

$$\sqrt{\rho g\,\tan(\beta - \beta_1)} \leq v \leq \sqrt{\rho g\,\tan(\beta + \beta_1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v \in [21\,;62]\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}}$$