Condensateur plan

On considère un plan (Oxy) infini de densité surfacique de charge σ uniforme.

1) Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ créé en tout point M de l'espace.

Correction

On se place en coordonnées cartésiennes $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$. Soit un point $\mathrm{M} = (x, y, z)$ quelconque de l'espace.

La distribution de charge est invariante par translation selon $\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{u}_y$. Donc le champ électrique l'est également.

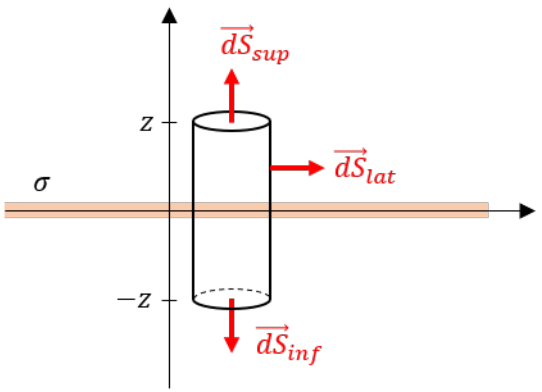
$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{E}(z)$$

Le plans $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_z)$ et $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge (en réalité, tous les plans qui contiennent le point M et le vecteur $\overrightarrow{u}_z$ sont des plans de symétrie). Donc $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ appartient à l'intersection de ces plans.

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = E(z)\,\overrightarrow{u}_z$$

Enfin, le plan $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de charge. Donc $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ est également symétrique par rapport à ce plan. On en déduit : $E(z) = -E(-z)$ et en particulier $E(0) = 0$.

On prend comme surface de Gauss un cylindre de surface S, dont les faces sont respectivement situées en $-z$ et $+z$ (avec $z > 0$). Sa surface se décompose en trois parties : supérieure $\overrightarrow{dS}_{sup} = dS\,\overrightarrow{u}_z$, inférieure $\overrightarrow{dS}_{inf} = -dS\,\overrightarrow{u}_z$ et latérale $\overrightarrow{dS}_{lat} = dS\,\overrightarrow{u}_r$.



Le théorème de Gauss assure que :

$$\oiint \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \underbrace{\iint_{S_{sup}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS}_{sup}}_{=\,ES} + \underbrace{\iint_{S_{inf}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS}_{inf}}_{=\,ES} + \underbrace{\iint_{S_{lat}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS}_{lat}}_{=\,0 \text{ car } \overrightarrow{E}\,\perp\,\overrightarrow{dS}_{lat}} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

On en déduit :

$$E(z>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u}_z & \text{si : } z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u}_z & \text{si : } z < 0 \\ \overrightarrow{0} & \text{si : } z = 0 \end{cases}}$$

On s'intéresse maintenant à un condensateur formé de deux disques parallèles conducteurs de rayon R, donc de surface $S = \pi R^2$, situés à une distance e l'un de l'autre. On applique une différence de potentiel U entre les deux disques. Il apparaît des charges opposées sur les armatures $+Q$ et $-Q$. On assimilera le champ créé par chacun de ces plans à celui d'un plan infini.

2) À quelle condition sur e peut-on assimiler le plan créé par un disque à celui d'un plan infini ?

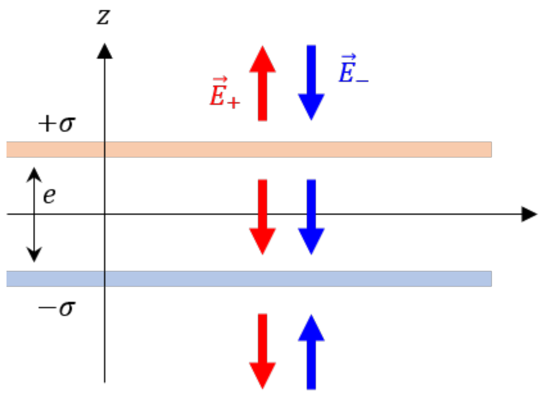
Correction

On peut négliger les effet de bord si $\boxed{e \ll \sqrt{S}}$.

3) Déterminer, sans refaire de calcul, le champ électrique $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ créé en tout point M de l'espace.

Correction

Plaçons les armatures à $\pm\dfrac{e}{2}$ et notons $\sigma = \dfrac{Q}{S}$ la charge surfacique de l'armature positive.



D'après ce qui précède, les champs $\overrightarrow{E}_\pm$ créés parles deux armatures sont :

$$\overrightarrow{E}_+(\mathrm{M}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2S\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u}_z & \text{si : } z > e/2 \\ -\dfrac{Q}{2S\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u}_z & \text{si : } z < e/2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{E}_-(\mathrm{M}) = \begin{cases} -\dfrac{Q}{2S\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u}_z & \text{si : } z > -e/2 \\ \dfrac{Q}{2S\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u}_z & \text{si : } z < -e/2 \end{cases}$$

D'après le théorème de superposition :

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{tot}(\mathrm{M}) = \begin{cases} -\dfrac{Q}{S\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u}_z & \text{si : } -e/2 > z > e/2 \\ \overrightarrow{0} & \text{sinon} \end{cases}}$$

4) En déduire l'expression de la capacité C du condensateur.

Correction

On rappelle la définition de la capacité d'un condensateur :

$$Q = CU \quad \text{avec : } \quad U = V_+ - V_-$$

Or,

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{dV}{dz} \quad \Rightarrow \quad V(z) = \begin{cases} \dfrac{Qz}{S\varepsilon_0} & \text{si : } -e/2 > z > e/2 \\ \dfrac{Qe}{2S\varepsilon_0} & \text{si : } z > e/2 \\ -\dfrac{Qe}{2S\varepsilon_0} & \text{si : } z < -e/2 \end{cases}$$

On en déduit :

$$V_+ - V_- = \frac{Qe}{S\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{S\varepsilon_0}{e}}$$