Faisceau gaussien

Une onde plane étant d'extension infinie, elle ne peut représenter de manière réaliste le faisceau d'un laser dans toute sa section S qui est en pratique inférieur au mm^2.

Dans un modèle plus réaliste, on considère l'onde électromagnétique émise dans le vide par un laser en $z = 0$. Cette onde se propage selon $\overrightarrow{u}_z$ et peut être mise sous la forme, dans la zone $z \geq 0$ (en coordonnées cylindriques) :

$$\overrightarrow{\underline{E}}(\mathrm{M}, t) = \underline{E}(r, z)\, e^{i(\omega t - kz)}\,\overrightarrow{u}_x \quad \text{avec :} \quad \underline{E}(r, z) = E_0\, \frac{iz_0}{z + iz_0}\, \exp\left(-ik\, \frac{r^2}{2\,(z + iz_0)}\right)$$

où E_0 et z_0 (appelée distance de Rayleigh) sont des constantes positives.

1) Montrer que le carré du module de $\underline{E}(r, z)$ se met sous la forme :

$$|\underline{E}(r, z)|^2 = A^2(z)\ \exp\left(-2\, \frac{r^2}{w^2(z)}\right) \quad \text{avec :} \quad w(z) = w_0\, \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}$$

Déterminer la constante w_0 nommée waist en fonction de z_0 et λ (la longueur d'onde).

Correction

On a :

$$\begin{aligned} |\underline{E}(r, z)|^2 &= \frac{E_0^2 z_0^2}{z^2 + z_0^2}\, \exp\left(\frac{-ikr^2}{2\,(z^2 + z_0^2)}\,(z - iz_0)\right) \exp\left(\frac{ikr^2}{2\,(z^2 + z_0^2)}\,(z + iz_0)\right) \\ &= \frac{E_0^2 z_0^2}{z^2 + z_0^2}\, \exp\left(-\frac{kr^2 z_0}{z^2 + z_0^2}\right) \end{aligned}$$

On trouve bien la forme demandée avec :

$$w^2(z) = \frac{2z_0}{k}\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_0 = \sqrt{\frac{2z_0}{k}} = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}}$$

2) Montrer que $w(z)\, A(z) = w_0 E_0$.

Correction

On a :

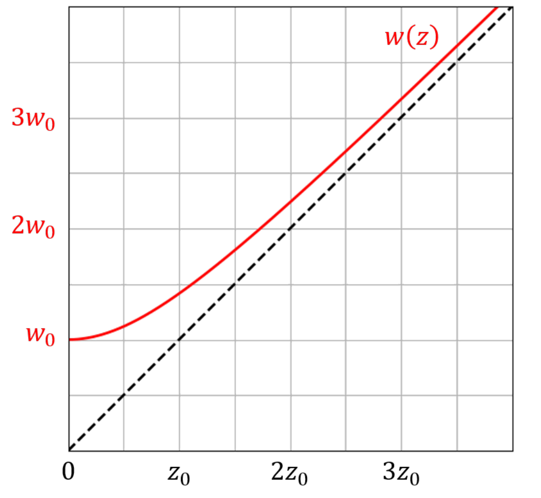
$$w^2(z)\, A^2(z) = \frac{2z_0}{k}\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right) \times \frac{E_0^2 z_0^2}{z^2 + z_0^2} = \frac{2z_0}{k} \times E_0^2 = w_0^2 E_0^2$$

D'où le résultat.

3) Représenter le graphe de $w(z)$ pour $z \geq 0$.

Correction

Graphe :

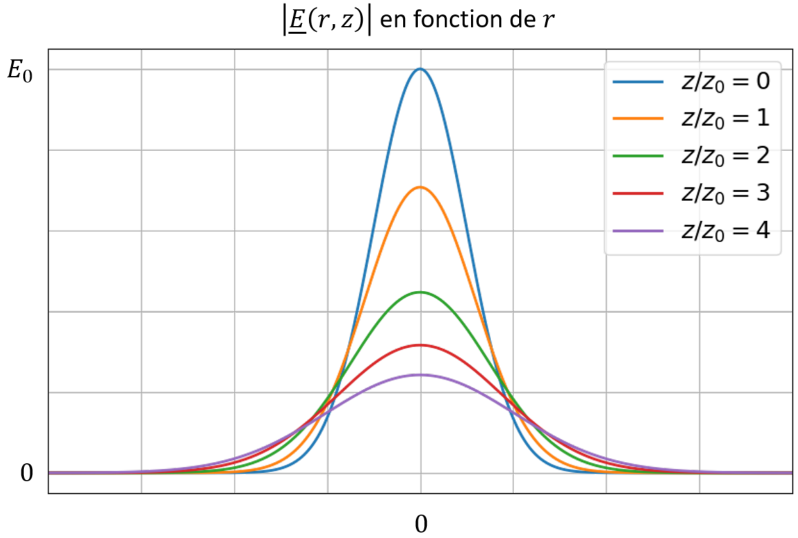


4) Représenter le graphe de $|\underline{E}(r, z)|$ en fonction de r pour $z = 0$, puis pour une valeur $z > 0$ fixée.

Correction

$|\underline{E}(r, z)|$ est un signal gaussien (courbe en cloche) qui s'étale de plus en plus lorsque z augmente.

Graphe :



5) Quelle signification physique peut-on donner à $w(z)$ ainsi qu'au waist w_0 ?

Correction

$w(z)$ est la distance caractéristique de décroissance de l'onde (donc du faisceau laser) en s'éloignant de l'axe à valeur de z fixé.

w_0 est la plus petite valeur de $w(z)$

6) Que dire du comportement du faisceau laser pour $z \ll z_0$?

Correction

Pour $z \ll z_0$, $w(z) \simeq w_0$. Le faisceau laser ne diverge pas, il est cylindrique.

7) Montrer que lorsque $z \gg z_0$, le faisceau laser a la forme d'un cône de sommet O et de demi-angle au sommet β, à exprimer en fonction de w_0 et z_0, puis de w_0 et λ. Calculer β en degrés pour un laser Nd−YAG possédant pour caractéristique $w_0 = 0{,}50$ mm et $\lambda = 1{,}1$ µm puis pour un laser CO_2 de même waist mais de longueur d'onde 10 fois plus importante.

Correction

Pour $z \gg z_0$:

$$w(z) \simeq \frac{w_0 z}{z_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta \simeq \tan(\beta) = \frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0}}$$

AN :

$$\begin{cases} \beta_{\text{YAG}} = 7{,}0 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0{,}040° \\ \beta_{\text{CO}_2} = 7{,}0 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0{,}40° \end{cases}$$