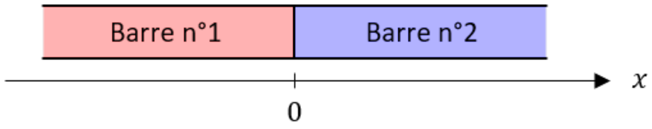
Température de jonction

Deux barres de très grande longueur et de même section S ont des conductivités thermiques λ_1 et λ_2, des masses volumiques ρ_1 et ρ_2 et des capacités thermiques massiques c_1 et c_2. Ces deux barres, initialement de températures uniformes T_1 et T_2, sont mises en contact en $x = 0$ à l'instant $t = 0$. Leurs surfaces latérales sont parfaitement calorifugées.



On définit $E = \sqrt{\rho c \lambda}$ l'effusivité thermique d'un matériau, et on donne :

$$E_{\text{main}} = 1{,}8 \times 10^3 \text{ SI} \qquad E_{\text{bois}} = 0{,}40 \times 10^3 \text{ SI} \qquad E_{\text{acier}} = 14 \times 10^3 \text{ SI}$$

1) Rappeler l'équation de diffusion thermique pour $x < 0$ et $x > 0$ et préciser l'expression des diffusivités thermiques D_1 et D_2 des deux barres.

Correction

On rappelle que :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec :} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}}$$

On admet que la fonction :

$$f(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-u^2}\,du$$

est solution de l'équation de diffusion thermique (D étant la diffusivité thermique) et que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,t) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x,t) = -1$$

2) Déterminer $f(0,t)$ et $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,t)}$

Correction

On a immédiatement :

$$\boxed{f(0,t) = 0}$$

Notons F une primitive de $u \mapsto e^{-u^2}$. Alors :

$$f(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[F\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) - F(0)\right]$$

On en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{2\sqrt{Dt}}\, e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,t)} = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}}}$$

3) En cherchant le champ de température sous la forme : $T_1(x,t) = A_1 + B_1 f_1(x,t)$ pour $x < 0$ et $T_2(x,t) = A_2 + B_2 f_2(x,t)$ pour $x > 0$, déterminer la température T_J à la jonction des deux barres. Exprimer T_J en fonction de T_1, T_2, E_1 et E_2.

Correction

Il y a 4 inconnues, il nous faut 4 équations : $T(-\infty,t) = T_1$; $T(+\infty,t) = T_2$; continuité de T et j_{th} en $x = 0$. Ainsi,

$$\begin{cases} T(-\infty,t) = T_1 = A_1 - B_1 \\ T(+\infty,t) = T_2 = A_2 + B_2 \\ T(0^-,t) = T(0^+,t) = T_J \quad \Rightarrow \quad T_J = A_1 = A_2 \\ j_{th}(0^-,t) = j_{th}(0^+,t) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{(0^-,t)} = \lambda_2 \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{(0^+,t)} \quad \Rightarrow \quad B_1 E_1 = B_2 E_2 \end{cases}$$

On part de la dernière équation :

$$B_1 E_1 = B_2 E_2 \quad \Rightarrow \quad E_1\,(T_J - T_1) = E_2\,(T_2 - T_J) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_J = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}}$$

La température de jonction est égale à la moyenne de T_1 et T_2, pondérée par l'effusivité du matériau.

4) Estimer la température de contact entre la main ($T_{\text{main}} = 37$ °C) et un objet de température $T_{\text{objet}} = 20$ °C lorsque cet objet est en bois ou en acier. Commenter.

Correction

Au moment du contact, on peut supposer que le modèle précédent est valable : la longueur sur laquelle la diffusion a lieu est négligeable (aux premiers instants) devant la longueur des matériaux et il est donc pertinent de les supposer infini du point de vue de la diffusion.

AN :

$$\boxed{T_J(\text{main/bois}) = 33{,}9\ °\text{C} \quad \text{et} \quad T_J(\text{main/acier}) = 21{,}9\ °\text{C}}$$

L'objet en acier semple bien plus froid que celui en bois, bien qu'ils soient tous les deux à la même température. Conclusion : la main est un très mauvais thermomètre.