Cavité électromagnétique à 1D

Une cavité est constituée de deux miroirs parfait situé à une distance L suivant la direction (Ox). Les miroirs sont confondus avec les plan en $x = 0$ et $x = L$. On suppose qu'à l'intérieur de la cavité, le champ électromagnétique d'une onde monochromatique polarisée selon $\overrightarrow{u_z}$, a pour représentation complexe :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0\ e^{i(\omega t - kx)}\overrightarrow{u_z} + E_0'\ e^{i(\omega t + kx)}\overrightarrow{u_z}$$

On rappelle les relations de passage du champ électromagnétique à une interface chargée en surface :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ \overrightarrow{n}_{1\to 2} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1}\right) \wedge \overrightarrow{n}_{1\to 2} = -\mu_0\ \overrightarrow{j_s}$$

où σ et $\overrightarrow{j_s}$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface, et $\overrightarrow{n}_{1\to 2}$ le vecteur unitaire normal dirigé de 1 vers 2.

1) Quelles sont les conditions limites imposées par la présence d'un métal parfait en $x = 0$ et $x = L$?

Correction

Le champ dans le métal parfait est nul. Le champ dans la cavité est selon $\overrightarrow{u_z}$. Le vecteur $\overrightarrow{n}_{1\to 2}$ de la relation de passage est selon $\overrightarrow{u_x}$. La relation de passage donne donc immédiatement :

$$\sigma = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{0}$$

aux deux interfaces.

2) En déduire l'expression de E_0' en fonction de E_0 et la suite des valeurs possibles de la fréquence f_n des ondes pouvant exister dans la cavité. Comment appelle-t-on les champs électromagnétiques à ces fréquences ?

Correction

Condition de la question précédente en $x = 0$:

$$\overrightarrow{0} = E_0\ e^{i\omega t}\overrightarrow{u_z} + E_0'\ e^{i\omega t}\overrightarrow{u_z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_0' = -E_0}$$

Condition de la question précédente en $x = L$:

$$\overrightarrow{0} = E_0\ e^{i\omega t}\left[e^{-ikL} - e^{ikL}\right]\overrightarrow{u_z} \quad \Rightarrow \quad \sin(kL) = 0$$

On en déduit :

$$k_n L = n\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_n = \frac{nc}{2L} \quad \text{avec :} \quad n \in \mathbb{N}^*}$$

3) Établir les expression réelle des champ électriques $\overrightarrow{E_n}$ et magnétiques $\overrightarrow{B_n}$ du champ à la fréquence f_n. Tracez ces champs pour $n = 1$, 2 et 3 à différents instants.

Correction

Le champ complexe vaut :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0\ e^{i\omega t}\left[e^{-ikx} - e^{ikx}\right]\overrightarrow{u_z} = -2iE_0\ e^{i\omega t}\ \sin(kx)\,\overrightarrow{u_z}$$

On en déduit le champ réel :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \mathcal{R}e\left(\underline{\overrightarrow{E}}\right) = 2E_0\ \sin(\omega t)\sin(kx)\,\overrightarrow{u_z}}$$

On utilise ensuite l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

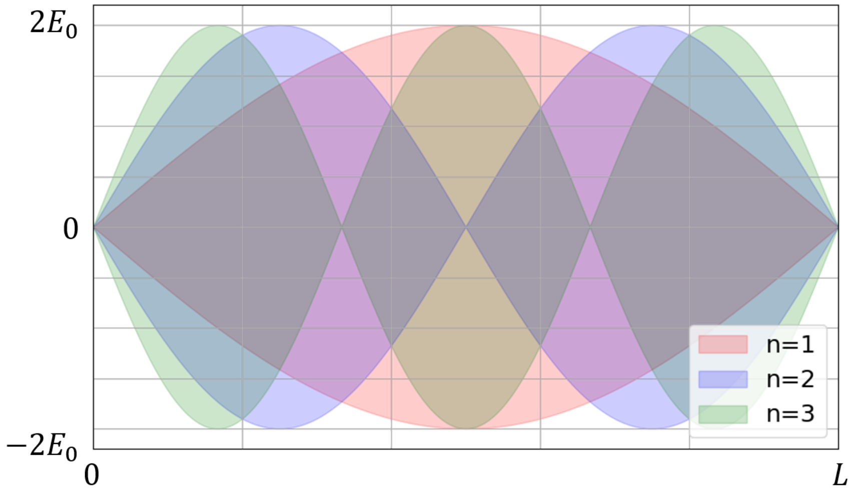
On en déduit :

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{B} = -\frac{2kE_0}{\omega}\ \cos(\omega t)\cos(kx)\,\overrightarrow{u_y}}$$

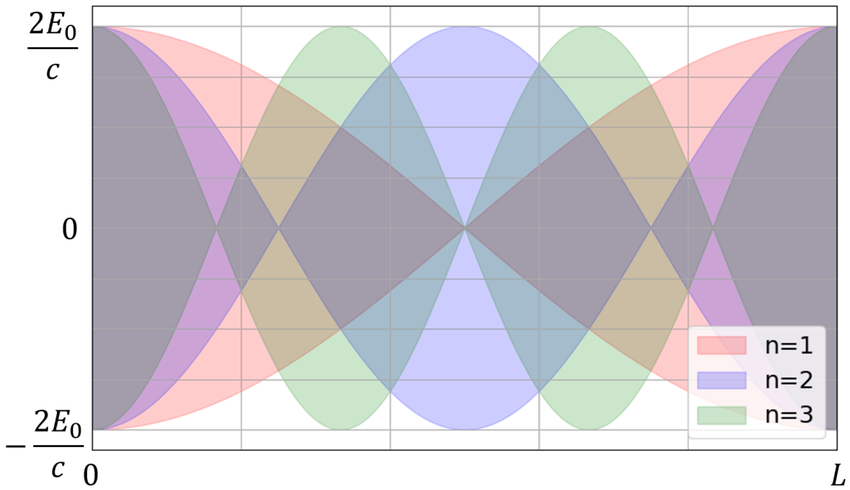
Pour $n = 1$, 2 et 3, on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E_1} = 2E_0\ \sin\left(\frac{\pi ct}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\overrightarrow{u_z} & \overrightarrow{B_1} = -\frac{2E_0}{c}\ \cos\left(\frac{\pi ct}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\overrightarrow{u_y} \\ \overrightarrow{E_2} = 2E_0\ \sin\left(\frac{2\pi ct}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\overrightarrow{u_z} & \overrightarrow{B_2} = -\frac{2E_0}{c}\ \cos\left(\frac{2\pi ct}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\overrightarrow{u_y} \\ \overrightarrow{E_3} = 2E_0\ \sin\left(\frac{3\pi ct}{L}\right)\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\overrightarrow{u_z} & \overrightarrow{B_3} = -\frac{2E_0}{c}\ \cos\left(\frac{3\pi ct}{L}\right)\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\overrightarrow{u_y} \end{cases}$$

Graphe du champ électrique :



Graphe du champ magnétique :



4) Quelle est la distance entre deux valeurs successives d'annulation de champ électrique $\overrightarrow{E_n}$ en fonction de L et n ?

Correction

D'après ce qui précède, le champ s'annule tous les $\Delta x = L/n$.

5) Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting et conclure.

Correction

Le vecteur de Poynting vaut :

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} = \frac{4E_0^2}{c\mu_0} \sin(\omega t)\sin(kx)\cos(\omega t)\cos(kx)\,\overrightarrow{u_x} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \sin(2\omega t)\sin(2kx)\,\overrightarrow{u_x}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \overrightarrow{0}}$$

L'énergie électromagnétique oscille selon $\overrightarrow{u_x}$ mais ne se déplace pas en moyenne. C'est une onde stationnaire.