Effet Meissner dans un supraconducteur

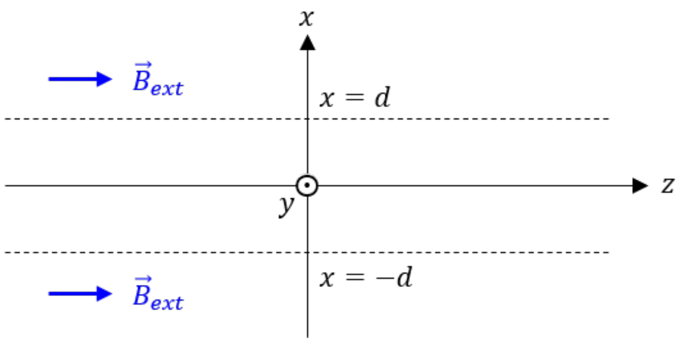
Lorsqu'un matériau supraconducteur est soumis à un champ magnétique uniforme, le supraconducteur expulse le champ magnétique pour que celui-ci soit nul à l'intérieur du supraconducteur : c'est l'effet Meissner. Cet effet est responsable de la lévitation magnétique d'un supraconducteur comme dans la figure ci-contre.

Pour expliquer cet effet, les frères London (1935) ont postulé que la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ dans le supraconducteur s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{j}\right) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\,\overrightarrow{B} \quad \text{avec :} \quad \lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}$$

avec $\overrightarrow{B}$ le champ magnétique dans le supraconducteur, m la masse de l'électron, n la densité volumique d'électrons supraconducteurs, e la charge de l'électron et $\mu_0 = 12{,}6 \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}}$ la perméabilité magnétique du vide.

On s'intéresse à un supraconducteur infini d'épaisseur $2d$ selon la direction $(\mathrm{O}x)$ plongé dans un champ magnétique statique et uniforme $\overrightarrow{B}_{ext} = B_{ext}\,\overrightarrow{u}_z$. On admet que le champ magnétique est continu au niveau de chaque interface en $x = \pm d$.



Dans l'ensemble de l'exercice, on se place en régime permanent.

Formulaire :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) - \Delta\overrightarrow{A}$$

1) Déterminer la dimension de λ et en donner un ordre de grandeur.

Correction

On utilise l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\frac{[B]}{\mathrm{L}} = [\mu_0] \times [j]$$

Or, d'après l'énoncé :

$$\frac{[j]}{\mathrm{L}} = \frac{[B]}{[\mu_0] \times [\lambda]^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{[\lambda] = \mathrm{L}}$$

λ est homogène à une longueur.

Si on considère 1 électron par atome, on a $n \sim 10^{29}\ \mathrm{m^{-3}}$ et alors $\lambda \simeq 20\ \mathrm{nm}$.

2) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ dans le supraconducteur.

Correction

On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{B}\right)\right) = -\Delta\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{j}\right)$$

Avec l'équation de London, il vient :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{j}\right) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\,\overrightarrow{B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{B}}{\lambda^2}}$$

3) On admet que $\overrightarrow{B} = B(x)\,\overrightarrow{u}_z$. En déduire $\overrightarrow{B}$ en tout point de l'espace et tracer l'allure de $B(x)$ pour $d = \lambda$ et $d = 50\lambda$. En déduire à quelle condition sur d le champ magnétique moyen peut être considéré comme nul à l'intérieur du supraconducteur (effet Meissner).

Correction

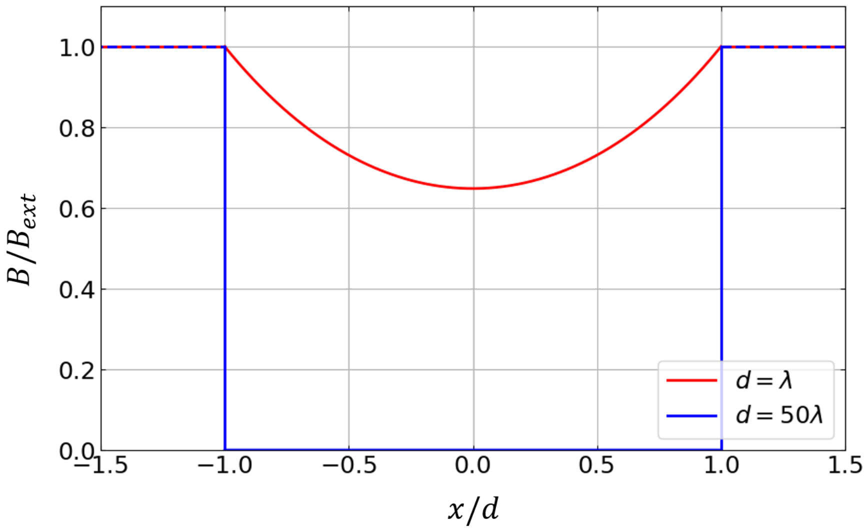
L'équation différentielle du champ magnétique se simplifie en :

$$\frac{d^2B}{dx^2} = \frac{B}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad B(x) = A\ \mathrm{ch}\left(\frac{x}{\lambda}\right) + B\ \mathrm{sh}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

Les conditions aux limites imposent que : $B(x = \pm d) = B_{ext}$. Cela impose en particulier que $B(x)$ soit paire et il vint immédiatement :

$$\boxed{B(x) = B_{ext}\,\frac{\mathrm{ch}(x/\lambda)}{\mathrm{ch}(d/\lambda)}}$$

Le rapport d/λ règle la rapidité de la décroissance exponentielle.



L'effet Meissner est donc efficace dès lors que $\boxed{d \gg \lambda}$.

4) En déduire la densité de courant volumique $\overrightarrow{j} = j(x)\,\overrightarrow{u_y}$ et tracer $j(x)$ pour $d = \lambda$ et $d = 50\lambda$. Pour $d = 50\lambda$, comment peut-on qualifier la densité de courant dans le supraconducteur ?

Correction

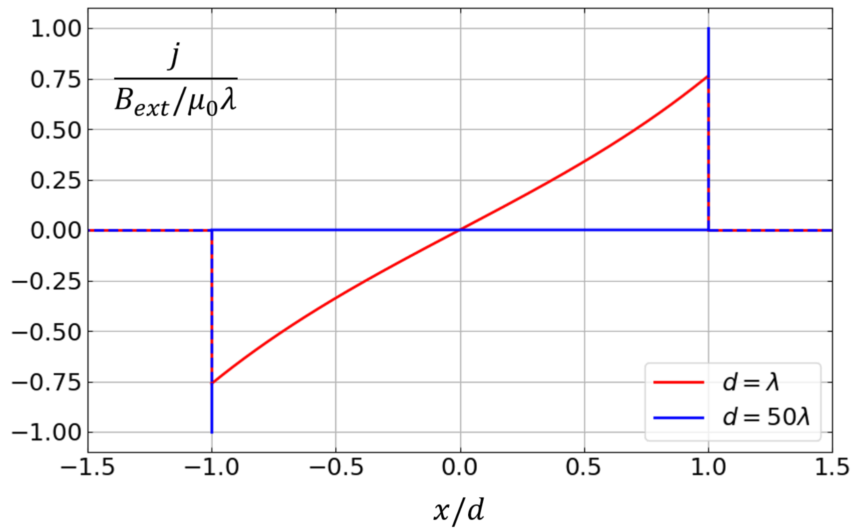
On rappelle l'expression du rotationnel en cartésien :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_z}$$

D'après la relation de London, on en déduit :

$$\frac{dj}{dx} = B_{ext}\,\frac{\mathrm{ch}(x/\lambda)}{\mathrm{ch}(d/\lambda)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{j(x) = \frac{B_{ext}}{\mu_0\lambda}\,\frac{\mathrm{sh}(x/\lambda)}{\mathrm{ch}(d/\lambda)}}$$

Graphes :



Lorsque l'effet Meissner est efficace, la densité de courant est essentiellement surfacique.

5) Évaluer l'intensité du courant dans le supraconducteur cubique de côté 1 cm pour un champ magnétique extérieur de 5 mT.

Correction

La densité de courant sur une face du supraconducteur est de l'ordre de :

$$\frac{B_{ext}}{\mu_0\lambda} \simeq 2\times 10^{11}\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}$$

On en déduit le courant sur une face en considérant un cube supraconducteur de l'ordre de $L = 1$ cm :

$$\boxed{I \simeq j\lambda L = 40\ \mathrm{A}}$$