Onde électromagnétique cylindrique

On étudie une onde électromagnétique cylindrique, émise par des sources situées le long d'un axe (Oz). En coordonnes cylindriques, le champ électrique s'écrit :

$$\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = E(r)\ e^{i(\omega t - kr)}\overrightarrow{u_z}$$

<u>Formulaire</u> : en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

1) Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{\underline{B}}(M,t)$ associé à ce champ électrique. Commenter son expression.

Correction

On cherche $\overrightarrow{\underline{B}}(M,t)$ sous la forme :

$$\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \overrightarrow{B}(r)\ e^{i(\omega t - kr)}$$

L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\underline{E}}\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{\underline{B}}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial \underline{E_z}}{\partial r}\overrightarrow{u_\theta} = -i\omega\overrightarrow{\underline{B}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{B}} = -\left[\frac{k}{\omega}\ E(r) + \frac{i}{\omega}E'(r)\right]\ e^{i(\omega t - kr)}\overrightarrow{u_\theta}}$$

2) Quelle est la valeur moyenne du vecteur de Poynting ? En déduire la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers un cylindre d'axe (Oz) de hauteur h.

Correction

On peut calculer la valeur moyenne de deux manières (avec les champs réels ou complexes) :

$$\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle = \frac{\langle\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}\rangle}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\ \mathcal{R}e\left[\overrightarrow{\underline{E}}\wedge\overrightarrow{\underline{B}}^*\right]$$

Travaillons avec les champs complexes.

$$\boxed{\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\ \mathcal{R}e\left[E(r)\cdot\left(\frac{k}{\omega}\ E(r) - \frac{i}{\omega}E'(r)\right)\right]\overrightarrow{u_z} = \frac{k}{2\mu_0\omega}\ E^2(r)\ \overrightarrow{u_r}}$$

On en déduit la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers un cylindre d'axe (Oz) de hauteur h.

$$\mathcal{P} = \oiint\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle\cdot\overrightarrow{dS}$$

Sur les surfaces du dessus et du dessous du cylindre, $\overrightarrow{\Pi}\perp\overrightarrow{dS}$ donc le produit scalaire est nul. Il ne reste que l'intégrale sur la surface latérale où : $\overrightarrow{dS} = dS\overrightarrow{u_r}$. Le champ $E(r)$ une constante pour l'intégrale, il peut donc en sortir. On obtient :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{k}{2\mu_0\omega}\ E^2(r)\times 2\pi rh}$$

3) Montrer que $E(r)$ se met sous la forme : $E(r) = E_0\ r^\alpha$ où α est une constante à déterminer.

Correction

Cette puissance est constante (ne dépend pas de r) car il n'y pas de pertes dans notre modélisation. Donc :

$$\boxed{E(r)\propto\frac{1}{\sqrt{r}}}$$

4) Pour $r\to\infty$, donner l'expression des champs $\overrightarrow{\underline{E}}$ et $\overrightarrow{\underline{B}}$ et décrire la structure de l'onde dans cette zone.

Correction

Le champ électrique n'est pas modifié (il n'y a rien à simplifier...) :

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \frac{E_0}{\sqrt{r}}\ e^{i(\omega t - kr)}\overrightarrow{u_z}}$$

Le champ magnétique se simplifie pour $r\to\infty$:

$$\overrightarrow{\underline{B}} = -\frac{E_0}{\sqrt{r}}\left[\frac{k}{\omega} - \frac{i}{2\omega r}\right]\ e^{i(\omega t - kr)}\overrightarrow{u_\theta} \simeq \boxed{-\frac{kE_0}{\omega\sqrt{r}}\ e^{i(\omega t - kr)}\overrightarrow{u_\theta}}$$

On remarque donc que, pour $r \to \infty$:

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{k\overrightarrow{u_r} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{\omega}}$$

Il s'agit de la structure d'une onde plane.