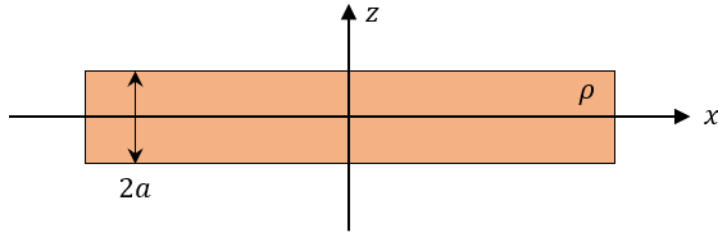


COUCHE ÉPAISSE ET RELATION DE PASSAGE

On considère une couche épaisse, comprise entre les deux plans d'équation $z = -a$ et $z = +a$ et infinie dans les directions x et y , chargée uniformément en volume avec une densité volumique de charge $\rho > 0$.



1) Déterminer le champ électrique \vec{E} créé par la distribution dans tout l'espace.

Correction

On se place en coordonnées cartésiennes $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Soit un point $M = (x, y, z)$ quelconque de l'espace.

La distribution de charge est invariante par translation selon \vec{u}_x et \vec{u}_y . Donc le champ électrique l'est également.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$$

Le plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge (en réalité, tous les plans qui contiennent le point M et le vecteur \vec{u}_z sont des plans de symétrie). Donc $\vec{E}(M)$ appartient à l'intersection de ces plans.

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z$$

Enfin, le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de charge. Donc $\vec{E}(M)$ est également symétrique par rapport à ce plan. On en déduit : $E(z) = -E(-z)$ et en particulier $E(0) = 0$.

On prend comme surface de Gauss un cylindre de surface S , dont les faces sont respectivement situées en $-z$ et $+z$ (avec $z > 0$). Sa surface se décompose en trois parties : supérieure $\vec{dS}_{sup} = dS \vec{u}_z$, inférieure $\vec{dS}_{inf} = -dS \vec{u}_z$ et latérale $\vec{dS}_{lat} = dS \vec{u}_r$.

Le théorème de Gauss assure que :

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \underbrace{\iint_{S_{sup}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{sup}}_{= ES} + \underbrace{\iint_{S_{inf}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{inf}}_{= ES} + \underbrace{\iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{lat}}_{= 0 \text{ car } \vec{E} \perp \vec{dS}_{lat}} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

On distingue alors les cas où $0 \leq z \leq a$ et $a \leq z$:

$$Q_{int}(z \leq a) = 2zS\rho \quad \text{et} \quad Q_{int}(z \geq a) = 2aS\rho$$

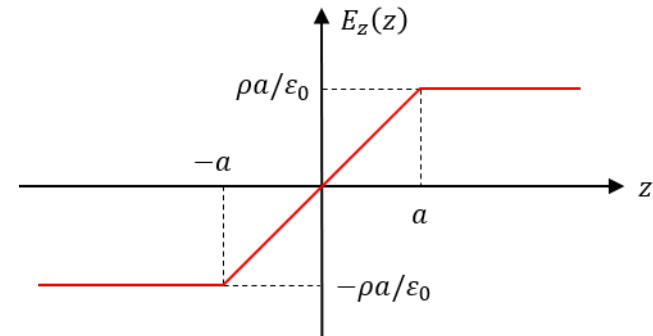
Conclusion :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si : } 0 \leq z \leq a \\ \frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si : } a \leq z \end{cases} \quad \text{et} \quad E(z) = -E(-z)$$

2) Tracer le graphe représentant $E_z(z)$. Commenter le comportement de \vec{E} en $z = \pm a/2$ où la densité de charge est discontinue.

Correction

Graphe :



Le champ est continu même pour une distribution volumique discontinue.

Considérons maintenant que la couche est d'épaisseur très fine : $a \rightarrow 0$. On cherche à la décrire par une distribution surfacique de charge σ uniforme à partir des résultats précédentes.

3) Exprimer la densité surfacique de charge σ en fonction de ρ et a . Que devient le

champ électrique dans chaque demi-espace ?

Correction

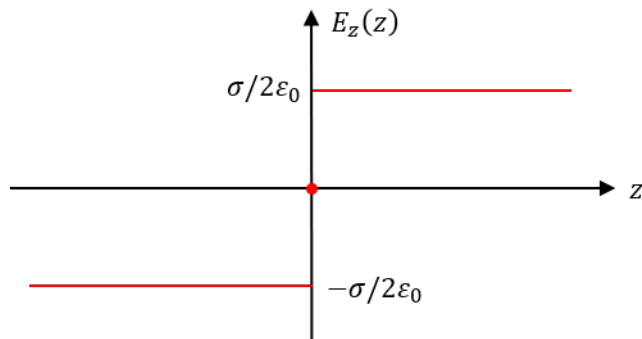
Soit une tranche d'épaisseur $2a$ et de surface S de la distribution de charge. La charge totale contenue dans cette tranche vaut :

$$Q = \rho \times 2aS = \sigma \times S \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = 2a\rho}$$

Le champ électrique devient constant dans chaque demi espace :

$$\vec{E}(\text{M}) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si : } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si : } z < 0 \\ \vec{0} & \text{si : } z = 0 \end{cases}$$

Graphe :



4) Commenter le comportement de \vec{E} au passage du plan chargé. Généraliser ce résultat à l'aide de cet exemple : en déduire la relation de passage du champ électrique \vec{E} au passage d'une distribution surfacique de charge σ .

Correction

Le champ électrique est discontinu au passage d'une distribution surfacique de charge. On constate que l'on a :

$$E(0^+) - E(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

On généralise ce résultat : au passage de l'interface, on a la relation de passage :

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}}$$