Polarisabilité de la matière : modèle de Thomson

Dans le modèle de l'atome d'hydrogène proposé par Thomson, le noyau est une boule de centre O et de rayon a à l'intérieur de laquelle la charge e est uniformément répartie. L'électron est une charge ponctuelle $-e$ pouvant se déplacer à l'intérieur de cette boule chargée.

1) Déterminer le champ créé par la boule uniformément chargée à l'intérieur de celle-ci.

Correction

On se place en coordonnées sphériques $(\mathrm{O}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. Soit un point $\mathrm{M} = (r, \theta, \varphi)$ quelconque de l'espace.

La distribution de charge est invariante par rotation selon les angles θ et φ. Donc le champ électrique l'est également.

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = \vec{E}(r)$$

Le plans $(\mathrm{M}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(\mathrm{M}, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge (en réalité, tous les plans qui contiennent la droite (OM) sont des plans de symétrie). Donc $\vec{E}(\mathrm{M})$ appartient à l'intersection de ces plans.

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = E(r)\,\vec{u}_r$$

On prend comme surface de Gauss une sphère de centre O de rayon r. Ainsi, $\vec{dS} = dS\,\vec{u}_r$.

Le théorème de Gauss assure que :

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

On se place dans le cas où $r \leq R$.

$$Q_{int}(r \leq R) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Conclusion :

$$\boxed{\vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,\vec{u}_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$

2) En déduire la force exercée sur l'électron.

Correction

L'électron subit la force :

$$\boxed{\vec{F} = -e\vec{E} = -\frac{e^2\ r}{4\pi a^3 \varepsilon_0}\,\vec{u}_r}$$

3) Montrer que cette force est analogue à une force de rappel de ressort dont on précisera la constante de raideur k et sa longueur à vide ℓ_0. Déterminer la position d'équilibre de l'électron. Est-elle stable ?

Correction

Une masse accrochée à un ressort fixé à l'origine O du repère subirait la force :

$$\vec{F}_{el} = -k\,(r - \ell_0)\,\vec{u}_r \quad \text{avec :} \quad k > 0$$

$\vec{F}$ est donc bien une force de rappel élastique avec :

$$\boxed{k = \frac{e^2}{4\pi a^3 \varepsilon_0} > 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\ell_0 = 0}$$

L'énergie potentielle associée est donc :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} k r^2$$

Cette fonction possède un minimum, ie. une position d'équilibre stable, en $r = 0$.

On applique un champ électrostatique $\vec{E}_0 = E_0\,\vec{u}_z$ uniforme, supposé ne pas modifier la répartition des charges du noyau.

4) Exprimer la distance r_{eq} entre la nouvelle position d'équilibre de l'électron et le centre du noyau.

Correction

On applique le PFD à l'équilibre ($\vec{a} = \vec{0}$) à l'électron dans le référentiel du noyau supposé galiléen.

$$\vec{0} = -\frac{e^2\ r_{eq}}{4\pi a^3 \varepsilon_0}\,\vec{u}_r - e\,\vec{E}_0$$

La nouvelle position d'équilibre est donc donnée par :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}}_{eq} = r_{eq}\,\overrightarrow{u}_r = -\frac{4\pi a^3 \varepsilon_0}{e}\ \overrightarrow{E}_0}$$

5) Pourquoi l'atome d'hydrogène acquiert-il un moment dipolaire $\overrightarrow{p}$? Exprimer la polarisabilité α définie par la relation : $\overrightarrow{p} = \alpha\varepsilon_0\overrightarrow{E}_0$.

Correction

Le barycentre des charges positives n'est plus confondu avec le barycentre des charges négatives : on a donc bien à faire à un dipôle.

Bien faire attention à la définition de $\overrightarrow{p} = q\ \overrightarrow{\mathrm{NP}}$, avec $q > 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ le vecteur du barycentre des charges négatives N vers le barycentre des charges positives P. On a donc :

$$\overrightarrow{p} = e \times \left(-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = 4\pi a^3 \varepsilon_0\ \overrightarrow{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 4\pi a^3}$$