Onde électromagnétique sphérique

On considère une onde sphérique vérifiant l'équation de d'Alembert :

$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

L'onde ne dépend que de sa distance à la source r,donc $F(r,t)$, en coordonnées sphériques. Il s'agit de tout type d'onde émise en trois dimensions par une source de faible dimension : son émis par un haut parleur dans une pièce, lumière émise par le soleil dans le système solaire, lumière émise par une ampoule dans une pièce, etc.

On donne le Laplacien sphérique pour une fonction radiale :

$$\Delta F = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big(rF\Big)$$

1) Quelle équation vérifie $G = rF$?

Correction

On obtient immédiatement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0}$$

2) Donner sans démonstration les solutions de cette équations en interprétant ses différents termes.

Correction

Les solutions de cette équation sont des solutions du type $H_1(r-ct)$ (onde progressive selon $+\overrightarrow{u_r}$) et $H_2(r+ct)$ (onde progressive selon $-\overrightarrow{u_r}$).

Pour la suite, on considère que F est un champ électrique que l'on écrit :

$$\overrightarrow{E} = \frac{A}{r}\,\cos(\omega t - kr)\,\overrightarrow{u_\theta}$$

<u>Formulaire</u> : en coordonnées sphérique

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\Big(\overrightarrow{A}\Big) = \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\left(\frac{\partial\left(\sin(\theta)\,A_\varphi\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{1}{r\,\sin(\theta)}\,\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\overrightarrow{u_\varphi}$$

3) Déterminer le champ magnétique.

Correction

F n'est pas une OPPH (pas plane, mais sphérique), on ne peut pas appliquer la relation de structure. On utilise donc l'équation de MF :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\Big(\overrightarrow{E}\Big) = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$$

Comme le champ $\overrightarrow{E}$ ne dépend que de la coordonnée r, on en déduit :

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(rE\Big)\overrightarrow{u_\varphi} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$$

On en déduit par intégration que le champ magnétique, nécessairement non constant car on a affaire à une onde, est porté sur $\overrightarrow{u_\varphi}$ et donc :

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = -\frac{kA}{r}\,\sin(\omega t - kr)$$

Par intégration, de constante nulle car c'est une onde sans valeur moyenne :

$$B_\varphi = \frac{kA}{r\omega}\,\cos(\omega t - kr) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\overrightarrow{B} = \frac{A}{rc}\,\cos(\omega t - kr)\,\overrightarrow{u_\varphi}}$$

4) En déduire le vecteur de Poynting moyen et le flux du vecteur de Poynting moyen à travers une sphère de rayon R. Interprétez.

Correction

Le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \frac{A^2}{r^2\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kr)\,\overrightarrow{u_r}$$

Et donc sa valeur moyenne :

$$\boxed{\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle = \frac{A^2}{2r^2\mu_0 c}\overrightarrow{u_r}}$$

Le flux du vecteur de Poynting moyen à travers une surface sphérique de rayon R s'écrit alors :

$$\boxed{\mathcal{P} = \oiint \langle\overrightarrow{\Pi}\rangle\cdot\overrightarrow{dS} = \langle\overrightarrow{\Pi}(R)\rangle \times 4\pi R^2 = \frac{2\pi A^2}{\mu_0 c}}$$

Il ne dépend pas de R, ce qui est normal car l'énergie se conserve. Ainsi, toute la puissance passant par une sphère de rayon R_1 passe également par une sphère de rayon R_2.