

MODÉLISATION DU NOYAU D'ATOMES LÉGERS

Le noyau de certains atomes légers peut être modélisé par une distribution sphérique de rayon R dont la densité volume de charge pour $r < R$ suit la loi :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

1) Calculer la charge du noyau.

Correction

La charge totale du noyau se détermine par intégration :

$$Q = \iiint_{\text{noyau}} \rho(r) \, dV = \int_0^R \rho(r) \times 4\pi r^2 \, dr = 4\pi\rho_0 \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5R^2}\right) = \boxed{\frac{8}{15}\pi R^3 \rho_0}$$

2) Déterminer, entre autres en fonction de Q , le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en tout point M de l'espace.

Correction

On se place en coordonnées sphériques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. Soit un point $M = (r, \theta, \varphi)$ quelconque de l'espace.

La distribution de charge est invariante par rotation selon les angles θ et φ . Donc le champ électrique l'est également.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$$

Le plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge (en réalité, tous les plans qui contiennent la droite (OM) sont des plans de symétrie). Donc $\vec{E}(M)$ appartient à l'intersection de ces plans.

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$$

On prend comme surface de Gauss une sphère de centre O de rayon r . Ainsi, $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$.

Le théorème de Gauss assure que :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

On distingue alors les cas où $r \leq R$ et $r \geq R$.

$$Q_{int}(r \leq R) = 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right) = Q \left(\frac{5r^3}{2R^3} - \frac{3r^5}{2R^5}\right) \quad \text{et} \quad Q_{int}(r \geq R) = Q$$

Conclusion :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi R^2 \varepsilon_0} \left(\frac{5r}{2R} - \frac{3r^3}{2R^3}\right) \vec{u}_r & \text{si : } r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \vec{u}_r & \text{si : } r \geq R \end{cases}$$