

# ÉCRANTAGE DE DEBYE

On considère un milieu électriquement neutre constitué de charges  $+q$  et  $-q$  de densités particulières (nombre de charges par unité de volume)  $n_0$  uniforme.

Une charge  $q$  est au point O. La présence de la charge modifie localement la répartition des charges. À une distance  $r$  de O, la densité particulière des charges « + » et des charges « - » est donnée par la loi de Boltzmann :

$$n_+(r) = n_0 \exp\left(-\frac{qV}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad n_-(r) = n_0 \exp\left(\frac{qV}{k_B T}\right)$$

où  $V$  est le potentiel électrostatique.

Formulaire : en coordonnées sphériques

$$\Delta A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}$$

1) Déterminer la densité volumique de charge  $\rho(r)$ .

**Correction**

On a :

$$\rho(r) = q [n_+(r) - n_-(r)]$$

2) Établir l'équation différentielle vérifiée par  $V(r)$ .

**Correction**

L'équation de Maxwell-Gauss donne :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad -\operatorname{div}(\operatorname{grad}(V)) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On en déduit :

$$\Delta V = -\frac{qn_0}{\varepsilon_0} \left[ \exp\left(-\frac{qV}{k_B T}\right) - \exp\left(\frac{qV}{k_B T}\right) \right]$$

3) Linéariser cette équation pour  $qV \ll k_B T$ . La résoudre en cherchant des solutions de la forme :  $V(r) = \frac{\alpha}{r} e^{-r/\beta}$ . Exprimer  $\beta$  en fonction de la longueur de Debye  $\lambda_D$ , définie par :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{q^2 n_0}}$$

**Correction**

On rappelle que :  $e^x \simeq 1 + x$ . Ainsi,

$$\Delta V = -\frac{qn_0}{\varepsilon_0} \times \frac{-2qV}{k_B T} = \frac{2V}{\lambda_D^2}$$

À l'aide du formulaire :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \left( 2r \frac{dV}{dr} + r^2 \frac{d^2 V}{dr^2} \right) = \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{d^2 V}{dr^2}$$

On calcule les dérivées successives de la fonction proposée :

$$\frac{dV}{dr} = -\alpha \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r\beta} \right) e^{-r/\beta} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 V}{dr^2} = \alpha \left( \frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^2\beta} + \frac{1}{r\beta^2} \right) e^{-r/\beta}$$

En combinant les trois équations précédentes, on trouve :

$$\frac{1}{r\beta^2} = \frac{2}{r\lambda_D^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = \frac{\lambda_D}{\sqrt{2}}}$$

4) Vers quoi doit tendre  $V(r)$  pour  $r \ll \lambda_D$ ? En déduire l'expression de  $\alpha$  en fonction de  $q$  et  $\varepsilon_0$ .

**Correction**

Lorsque  $r \ll \lambda_D$ , le potentiel doit tendre vers celui de la charge ponctuelle placée au centre le repère (que l'on peut retrouver rapidement par un théorème de Gauss). Ainsi,

$$V(r \rightarrow 0) \simeq \frac{\alpha}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}}$$

5) Interpréter l'expression de  $V(r)$  ainsi obtenue.

**Correction**

On a donc :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r\sqrt{2}/\lambda_D}$$

À partir de  $r$  de l'ordre de quelques fois la longueur de Debye, le potentiel devient négligeable : on dit qu'il est « blindé ». Au delà de cette zone, le potentiel électrique est nul : la distribution reste neutre. Dans la zone de quelques longueurs de Debye, nous avons un potentiel électrique et il n'y a pas égalité des charges électriques positives

et négatives.