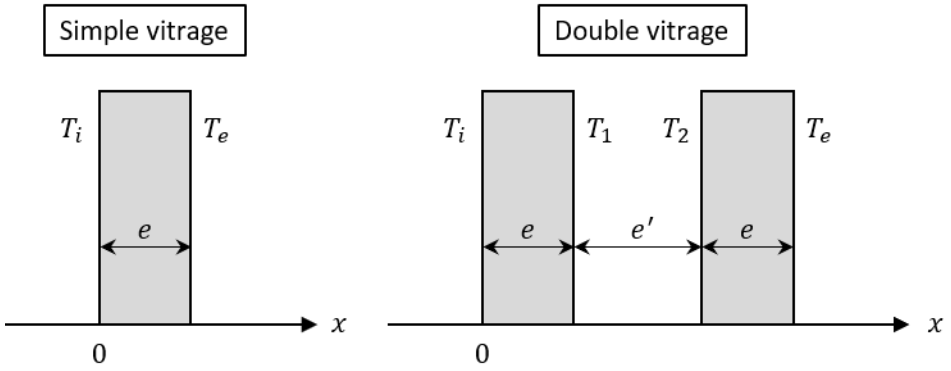
Principe du double vitrage

On ne considère que des régimes permanents, indépendants du temps. L'intérieur d'une pièce de température T_i est séparé de l'extérieur de température T_e par une paroi vitrée de surface S, orthogonale à l'axe (Ox).
Données :

- Températures : $T_i = 292$ K, $T_e = 270$ K et $\Delta T = T_i - T_e > 0$
- Épaisseurs : $e = e' = 3{,}0$ mm
- Conductivités thermiques : $\lambda = 1{,}2\ \mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$ et $\lambda' = 0{,}025\ \mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$
- Coefficients conducto-convectifs : $h_i = 10\ \mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}}$ et $h_e = 14\ \mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}}$



Simple vitrage

La paroi est une vitre simple d'épaisseur e et de conductivité thermique λ.

1) Exprimer le flux thermique ϕ_1 sortant de la pièce à travers cette paroi en fonction de λ, S, e et ΔT.

Correction

Le flux thermique vaut :

$$\phi_1 = jS = -\lambda S\,\frac{dT}{dx} \quad \Rightarrow \quad dT = -\frac{\phi_1}{\lambda S}\,dx$$

On intègre :

$$\int_{T_i}^{T_e} dT = -\frac{\phi_1}{\lambda S}\int_0^e dx \quad \Rightarrow \quad T_e - T_i = -\frac{\phi_1 e}{\lambda S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi_1 = \frac{\lambda S}{e}\,\Delta T}$$

2) Exprimer la résistance thermique R_1 de la paroi vitrée.

Correction

Par définition de la résistance thermique :

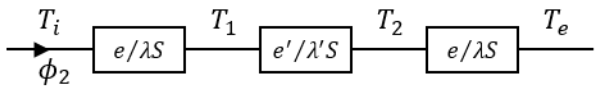
$$\boxed{R_1 = \frac{\Delta T}{\phi_1} = \frac{e}{\lambda S}}$$

Double vitrage

La paroi est maintenant un ensemble de deux vitres de même épaisseur e et de conductivité thermique λ, séparées par une lame d'air d'épaisseur e' d'air de conductivité thermique λ'.

3) Exprimer le flux thermique ϕ_2 sortant de la pièce.

Correction



On a trois résistances thermiques en série.

$$R_{eq} = \frac{\Delta T}{\phi_2} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} + \frac{e}{\lambda S}$$

Donc :

$$\boxed{\phi_2 = \frac{\Delta T}{\dfrac{2e}{\lambda S} + \dfrac{e'}{\lambda' S}}}$$

4) Exprimer puis calculer $\eta = \phi_2/\phi_1$, T_1 et T_2, les températures des faces en regard des deux vitres.

Correction

On a :

$$\boxed{\eta = \frac{e/\lambda}{2e/\lambda + e'/\lambda'} = 0{,}02}$$

Pour déterminer les températures, on peut également utiliser le montage électrique équivalent.

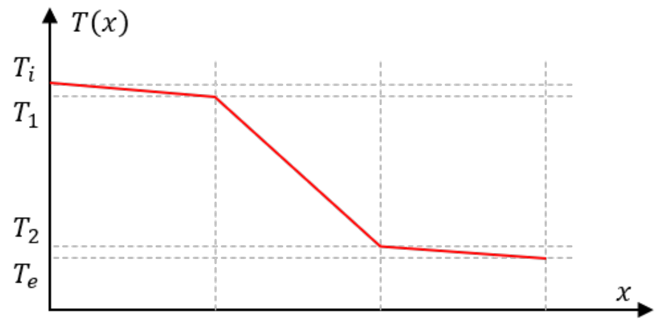
$$\frac{T_i - T_1}{\phi_2} = \frac{e}{\lambda S} \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_i - \frac{e\phi_2}{\lambda S} = T_i - \frac{\Delta T}{2 + \dfrac{\lambda e'}{\lambda' e}} = \boxed{291{,}6\ \text{K}}$$

De même :

$$T_2 = T_e + \frac{e\phi_2}{\lambda S} = T_e + \frac{\Delta T}{2 + \dfrac{\lambda e'}{\lambda' e}} = \boxed{270{,}4\ \text{K}}$$

5) Représenter graphiquement les variations de la température en fonction de x dans le double vitrage.

Correction



Prise en compte du flux conducto-convectif

En plus de la conduction étudiée ci-dessus, on doit tenir compte des échanges conducto-convectifs entre le verre et l'air. Une surface de verre d'aire S, à la température T_v, échange avec l'air, à la température T_a, le flux thermique :

$$\phi_{v\to a} = hS\left(T_v - T_a\right) \quad \text{avec :} \quad h > 0$$

On note h_e le coefficient d'échange entre le verre et l'air extérieur et h_i celui relatif aux autres contacts verre-air.

6) Quelle valeur donnait-on implicitement à h dans les modèles précédents ?

Correction

Dans un modèle sans échange conducto-convectif, $T_v = T_a$ la température est continue à l'interface. Or le flux est fini. Donc nécessairement $\boxed{h = \infty}$.

7) Montrer que ces échanges superficiels introduisent une résistance thermique R_2. Donner l'expression de R_2.

Correction

On reconnaît l'expression d'une résistance thermique :

$$\boxed{R_2 = \frac{T_v - T_a}{\phi_{v\to a}} = \frac{1}{hS}}$$

8) Exprimer puis calculer, dans ce nouveau modèle, le rapport η. Conclure.

Correction

On ajoute ces résistances thermique dans le modèle électrique équivalent. On obtient :

$$\phi_1 = \frac{\Delta T}{\dfrac{1}{h_i S} + \dfrac{e}{\lambda S} + \dfrac{1}{h_e S}}$$

et

$$\phi_2 = \frac{\Delta T}{\dfrac{1}{h_i S} + \dfrac{e}{\lambda S} + \dfrac{1}{h_i S} + \dfrac{e'}{\lambda' S} + \dfrac{1}{h_i S} + \dfrac{e}{\lambda S} + \dfrac{1}{h_e S}}$$

Donc :

$$\boxed{\eta = \frac{1/h_i + e/\lambda + 1/h_e}{3/h_i + 2e/\lambda + e'/\lambda'} = 0{,}35}$$

Les échanges conducto-convectifs ne peuvent absolument pas être négligés !