

# APPROCHE ÉNERGÉTIQUE DE L'EFFET DE PEAU

Considérons un conducteur électrique semi-infini de conductivité  $\gamma$  et dans lequel règne un champ

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \alpha z)} \vec{u}_x$$

1) S'agit-il d'une onde plane? D'une onde progressive? Que représente  $\alpha$ ? Quelles sont la direction et le sens de propagation? La polarisation?

## Correction

Il s'agit bien d'une onde plane, car les surfaces d'onde (surface où l'amplitude est constante, à  $t$  fixé) sont des plans  $z = cte$ , mais elle n'est pas progressive (l'onde se retrouve à l'identique après propagation, il est donc possible de l'écrire  $s(z, t) = s(z - ct)$ ) à cause de l'exponentielle décroissante.

Le paramètre  $\alpha$  représente à la fois le vecteur d'onde et l'inverse de la longueur d'amortissement (longueur de peau) de l'onde.

L'onde est polarisée (direction du champ électrique) rectilignement selon  $\vec{u}_x$ .

2) Calculer le champ  $\vec{B}(z, t)$  associé.

## Correction

Pour pouvoir écrire :

$$\vec{\text{rot}} = -j \vec{k} \wedge$$

il faut écrire l'onde avec un vecteur d'onde complexe, soit :

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \vec{u}_x \quad \text{avec : } \underline{k} = \alpha(1 - i) \quad \text{et} \quad \vec{k} = \underline{k} \vec{u}_z$$

L'équation de Maxwell-Faraday donne alors :

$$-i \vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(z, t) = \frac{\underline{k} \vec{u}_z \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\alpha(1 - i)}{\omega} E_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \alpha z)} \vec{u}_y$$

3) Exprimer la moyenne temporelle  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  du vecteur de Poynting.

## Correction

En utilisant les champs complexes,

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{R}e \left( \vec{E} \wedge \vec{B}^* \right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{R}e \left( E_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \alpha z)} \times \frac{\alpha(1 - i)}{\omega} E_0 e^{-\alpha z} e^{-i(\omega t - \alpha z)} \right) \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y \\ &= \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0 \omega} e^{-2\alpha z} \vec{u}_z \end{aligned}$$

4) Effectuer un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface  $S$  et de longueur  $dz$ . Déterminer la puissance moyenne  $\langle \mathcal{P}_{J,vol} \rangle$  cédée par unité de volume dans le conducteur.

## Correction

Puissance moyenne entrant par la face située en  $z$  :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \iint \langle \vec{\Pi}(z) \rangle \cdot ds \vec{u}_z = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0 \omega} S e^{-2\alpha z}$$

Puissance moyenne sortant par la face située en  $z + dz$  :

$$\langle \mathcal{P}_s \rangle = \iint \langle \vec{\Pi}(z + dz) \rangle \cdot ds \vec{u}_z = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0 \omega} S e^{-2\alpha(z+dz)}$$

La puissance entrant dans le conducteur mais n'en sortant pas est cédée au conducteur. Ainsi,

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \langle \mathcal{P}_e \rangle - \langle \mathcal{P}_s \rangle = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0 \omega} S \left[ e^{-2\alpha z} - e^{-2\alpha(z+dz)} \right]$$

Or,

$$e^{-2\alpha z} - e^{-2\alpha(z+dz)} = -\frac{d}{dz} \left( e^{-2\alpha z} \right) \times dz = 2\alpha dz e^{-2\alpha z}$$

Ainsi,

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\alpha^2 E_0^2}{\mu_0 \omega} S dz e^{-2\alpha z}$$

On en déduit la puissance volumique :

$$\langle \mathcal{P}_{J,vol} \rangle = \frac{\alpha^2 E_0^2}{\mu_0 \omega} e^{-2\alpha z}$$

5) Établir une autre expression de la puissance cédée à partir de la loi d'Ohm locale.

**Correction**

La puissance volumique dissipée par effet Joule vaut :

$$\langle \mathcal{P}_{J,vol} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \gamma \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right) = \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-2\alpha z}$$

6) À partir des deux expressions obtenues, déduire la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.

**Correction**

Par identification,

$$\frac{\alpha^2}{\mu_0 \omega} = \frac{\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \gamma}}$$