Spectroscopie par transformée de Fourier

Un interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air. On place à la sortie de l'appareil une lentille mince convergente, suivie d'un photorécepteur de petite dimension placé au point focal image de la lentille. On suppose que ce photorécepteur est linéaire : il délivre un signal électrique $u(t)$ proportionnel à l'éclairement reçu. Un système d'acquisition permet de numériser le signal $u(t)$, pendant qu'un moteur translate l'un des deux miroirs à vitesse constante v_0.

On obtient ainsi sur ordinateur une courbe, appelée interférogramme, dont on veut déduire des informations qualitatives et quantitatives sur le spectre de la lumière envoyée dans l'interféromètre. L'expérience est réalisée dans l'air, dont on considère l'indice égal à 1.

Formulaire :

$$\frac{\cos(p)+\cos(q)}{2} = \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \; ; \; \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2} = \cos(a)\sin(b)$$

1) Préciser les conditions d'éclairement du Michelson. Préciser la localisation des franges. Quelle figure d'interférences observe-t-on ? Donner l'expression de la différence de marche δ au niveau du détecteur en fonction de e, l'épaisseur de la lame d'air.

Correction

Le Michelson est éclairé par une source étendue. Les franges sont localisées à l'infini, on les observe dans le plan focal image d'une lentille mince convergente. En lame d'air, on observe des anneaux concentriques.

La différence de marche vaut :

$$\boxed{\delta = 2e = 2v_0 t}$$

2) Dans cette question seulement, la source est supposée monochromatique de fréquence ν_0. Donner l'expression de l'éclairement en en fonction de δ, ν_0 et I_0 (l'intensité si l'on occulte un des deux bras de l'interféromètre).

Correction

Si I_0 est l'intensité si l'on occulte un des deux bras de l'interféromètre, alors l'intensité, donnée par la formule de Fresnel, va osciller entre 0 et $2I_0$.

La formule de Fresnel (avec $\lambda_0 = c/\nu_0$) avec ce qui précède donne :

$$\boxed{I(\delta) = I_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi\nu_0\delta}{c}\right)\right]}$$

La source précédente est remplacée par une lampe à vapeur qui émet deux radiations très proches, de fréquences respectives $\nu_1 = \nu_0 - \dfrac{\Delta\nu}{2}$ et $\nu_2 = \nu_0 + \dfrac{\Delta\nu}{2}$ et de même intensité $(I_0/2)$.

3) Montrer que l'éclairement se met sous la forme :

$$I(\delta) = I_0\left[1+\mathcal{C}(\delta)\times\cos\left(\frac{2\pi\nu_0\delta}{c}\right)\right]$$

où $\mathcal{C}(\delta)$ est une fonction de contraste à déterminer.

Correction

Les deux sources n'ont pas la même pulsation, elles sont donc incohérentes. On somme donc les intensités.

$$I(\delta) = \frac{I_0}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi\nu_1\delta}{c}\right)\right] + \frac{I_0}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi\nu_2\delta}{c}\right)\right]$$

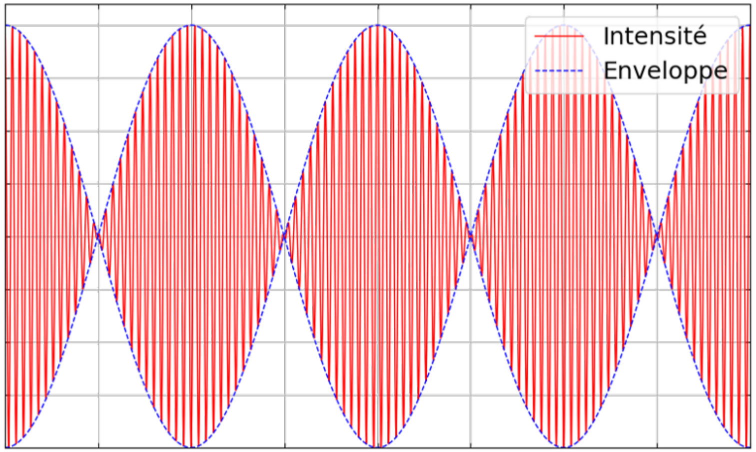
Avec le formulaire, on en déduit :

$$\boxed{I(\delta) = I_0\left[1+\mathcal{C}(\delta)\times\cos\left(\frac{2\pi\nu_0\delta}{c}\right)\right] \quad \text{avec :} \quad \mathcal{C}(\delta) = \cos\left(\frac{\pi\Delta\nu\delta}{c}\right)}$$

4) Tracer $I(\delta)$.

Correction

Graphe :



La source précédente est remplacée par une lampe à vapeur qui émet une radiation polychromatique. On suppose que le profil spectral est rectangulaire de centre ν_0 et de largeur $\Delta\nu$, c'est-à-dire que la densité spectrale $\mathcal{E}$ vaut :

$$\mathcal{E}(\nu) = \frac{dI}{d\nu} = \begin{cases} \mathcal{E}_0 & \text{si : } \nu_0 - \dfrac{\Delta\nu}{2} < \nu < \nu_0 + \dfrac{\Delta\nu}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec :} \quad \mathcal{E}_0 = \frac{I_0}{\Delta\nu}$$

5) Montrer que l'éclairement se met de nouveau sous la forme :

$$I(\delta) = I_0 \left[1 + \mathcal{C}(\delta) \times \cos\left(\frac{2\pi\nu_0\delta}{c} \right) \right]$$

où $\mathcal{C}(\delta)$ est une fonction de contraste à déterminer.

Correction

Pour une bande de fréquence $[\nu\ , \nu + d\nu]$ tenant compte de la lumière provenant des deux bras de l'interféromètre, l'intensité sur l'écran vaut (formule de Fresnel) :

$$dI = \mathcal{E}_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c} \right) \right] d\nu$$

Pour avoir l'intensité totale, il faut sommer (une somme continue cette fois, pas discrète) les intensités dues à chaque fréquence, car toutes les fréquences sont incohérentes.

$$I = \int dI = \int_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} \mathcal{E}_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c} \right) \right] d\nu$$

Ainsi, avec le formulaire :

$$I = \mathcal{E}_0 \left[\nu + \frac{\sin(2\pi\nu\delta/c)}{2\pi\delta/c} \right]_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} = \mathcal{E}_0 \left[\Delta\nu + 2\, \frac{\cos(2\pi\nu_0\delta/c)\sin(\pi\Delta\nu\delta/c)}{2\pi\delta/c} \right]$$

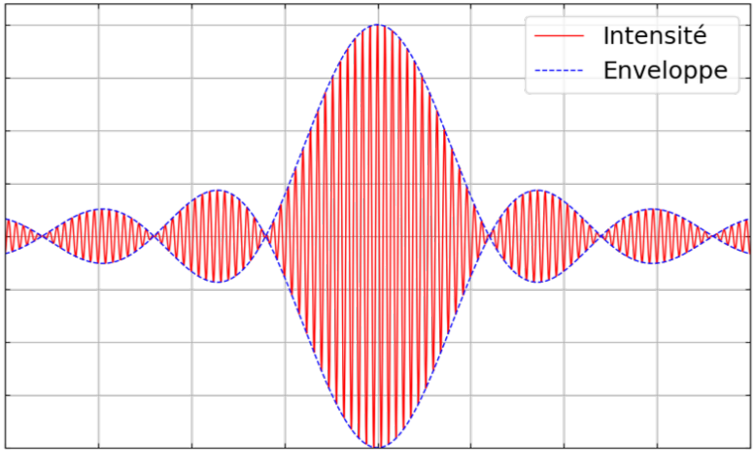
Finalement,

$$\boxed{I(\delta) = I_0 \left[1 + \mathcal{C}(\delta) \times \cos\left(\frac{2\pi\nu_0\delta}{c} \right) \right] \quad \text{avec :} \quad \mathcal{C}(\delta) = \frac{\sin(\pi\Delta\nu\delta/c)}{\pi\Delta\nu\delta/c}}$$

6) Tracer $I(\delta)$.

Correction

Graphe :

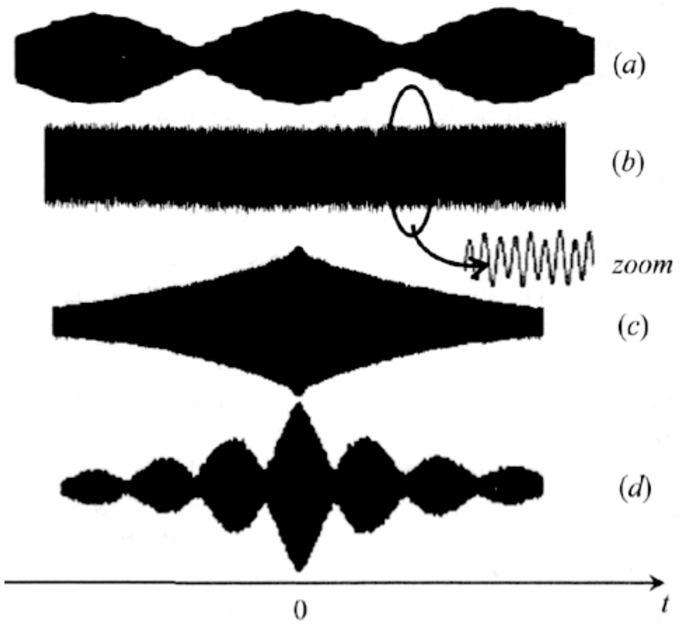


On possède trois sources de lumière :

- un laser He−Ne, dont on supposera l'émission parfaitement monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632{,}8$ nm ;
- une lampe à vapeur de mercure, associée soit à un filtre permettant d'isoler la raie verte $\lambda = 546{,}1$ nm, soit à un filtre permettant d'isoler le doublet jaune $\Delta\lambda = 2{,}1$ nm ;

- une lampe à vapeur de sodium, associée à un filtre permettant d'isoler le doublet jaune $\Delta\lambda = 0{,}6$ nm.

On donne ci-dessous les interférogrammes observés avec les différentes sources lumineuses.



7) Associer, en le justifiant, chaque source à son interférogramme.

Correction

Figure (b) : signal sinusoïdal sans perte de contraste, c'est le laser.

Figures (a) et (d) : pertes de contraste régulières (battements) du fait de la non-cohérence des deux raies dans un doublet. Plus les raies sont proches, plus les battements sont espacés. Donc (a) : doublet jaune du sodium ; et (d) : doublet jaune du mercure.

Figure (c) : signal sinusoïdal avec perte de contraste due à la décohérence temporelle (on n'observe en réalité que le pic principale de la figure de la question précédente, pas les rebonds suivants), c'est le mercure avec filtre vert.

Remarque : la figure (d) est une combinaison des deux effet vus dans cet exercice : battements dus à un doublet et raie non monochromatique. C'est pour cela que l'amplitude des battements décroît ; ce n'est pas le cas pour le (a).