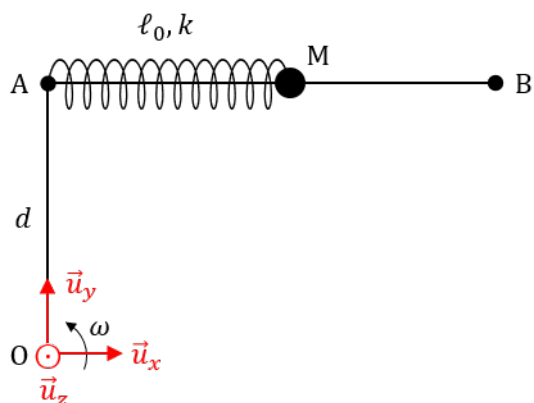


PRINCIPE DU TACHYMÈTRE

Un « L » métallique OAB tourne à vitesse angulaire constante ω dans le plan horizontal autour de l'axe vertical (Oz). Un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0 est fixé en A au dispositif et à son extrémité est attaché une masse m qui coulisse sans frottement sur la partie rectiligne AB. On désigne par ℓ_{eq} la longueur du ressort à l'équilibre dans le référentiel tournant.

À l'instant initial, le ressort n'est ni comprimé, ni tendu et la masse a une vitesse nulle par rapport à la tige.



Notation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad a = \frac{\omega}{\omega_0}$$

1) Établir l'équation différentielle du mouvement et la mettre sous forme canonique, en fonction de ℓ_0 , a et ω .

Correction

On se place dans le référentiel (O, x, y, z) tournant à la vitesse ω par rapport à un

référentiel galiléen. Le point M a pour coordonnées : $\overrightarrow{OM} = (x, d, 0)$. Bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z \\ \vec{R} = R_y\vec{u}_y + R_z\vec{u}_z \\ \vec{F}_{el} = -k(x - \ell_0)\vec{u}_x \\ \vec{f}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{OM} = m\omega^2(x\vec{u}_x + d\vec{u}_y) \\ \vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} = -2m\omega\vec{u}_z \wedge \dot{x}\vec{u}_x = -2m\omega\dot{x}\vec{u}_y \end{cases}$$

On applique le PFD que l'on projette sur (Ox) .

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) + m\omega^2x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + (a^2 - 1)\omega^2x = a^2\omega^2\ell_0}$$

2) Montrer qu'il existe une valeur particulière de a , notée a_c , qui sépare les solutions en deux catégories : les solutions bornées et les solutions non bornées.

Correction

La nature des solutions change selon le signe de $a^2 - 1$. On pose donc : $\boxed{a_c = 1}$. Si $a > a_c$, alors les solutions sont bornées (oscillateur harmonique). Si $a \leq a_c$, alors les solutions ne sont pas bornées.

Dans la suite, on se place dans le cas où $a > a_c$.

3) Introduire la pulsation propre ω_1 puis résoudre complètement l'équation différentielle.

Correction

On pose $\boxed{\omega_1 = \omega\sqrt{a^2 - 1}}$. Solution :

$$x(t) = \frac{a^2}{a^2 - 1}\ell_0 + A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)$$

Avec les conditions initiales :

$$x(0) = \frac{a^2}{a^2 - 1}\ell_0 + A = \ell_0 \quad \Rightarrow \quad A = \left(1 - \frac{a^2}{a^2 - 1}\right)\ell_0 = -\frac{\ell_0}{a^2 - 1}$$

et,

$$v(0) = B\omega_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

Ainsi :

$$x(t) = \frac{a^2 - \cos(\omega_1 t)}{a^2 - 1} \ell_0$$

4) Déterminer la force que la tige exerce sur la perle.

Correction

Il s'agit de la réaction normale du support. En appliquant le PFD sur (Oy) et (Oz) , il vient immédiatement :

$$\vec{R} = (2m\omega\dot{x} - m\omega^2 d) \vec{u}_y + mg \vec{u}_z$$

5) Montrer que le mouvement est conservatif.

Correction

Les forces \vec{P} , \vec{R} et \vec{f}_{ic} sont orthogonales au mouvement et donc ne travaillent pas. Les forces \vec{F}_{el} et \vec{f}_{ie} sont conservatives car elles dérivent d'une énergie potentielle (cf. ci-dessous). Le mouvement est donc conservatif.

6) Déterminer l'énergie potentielle du système. En déduire la/les positions d'équilibre ainsi que leur stabilité.

Correction

L'énergie potentielle vaut :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 OM^2 = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

Le système impose $y = d$, le dernier terme est donc constant. On cherche les zéros de sa dérivée première pour trouver les positions d'équilibres.

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = k(x_{eq} - \ell_0) - m\omega^2 x_{eq} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq} = \frac{a^2}{a^2 - 1} \ell_0$$

On trouve (évidemment) le même résultat qu'avec l'équation différentielle.

Déterminons le signe de la dérivée seconde pour connaître sa stabilité.

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} = k - m\omega^2 = m\omega^2(a^2 - 1) > 0$$

Cette position est toujours stable dans le cas où $a > a_c$.

7) En réalité, on ne peut pas négliger les frottements. À quoi sert ce dispositif ? Où se trouve sa sensibilité maximale ?

Correction

Avec les frottements, le système finit par atteindre sa position d'équilibre.

$$x_{eq} = \frac{a^2}{a^2 - 1} \ell_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \ell_0$$

Connaître x_{eq} , c'est connaître a , donc ω . Un tachymètre permet de mesurer des vitesses angulaires.

Un appareil sensible est un appareil pour lequel une petite variation de la grandeur que l'on cherche à mesurer (ω) induit une grande variation de ce qui est réellement mesuré (x_{eq}). Mathématiquement, on veut que $dx_{eq}/d\omega$ soit le plus grand possible.

$$\frac{dx_{eq}}{d\omega} = \frac{-2\omega\omega_0^2\ell_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

Sa sensibilité maximale se trouve donc pour $\omega \rightarrow \omega_0$.