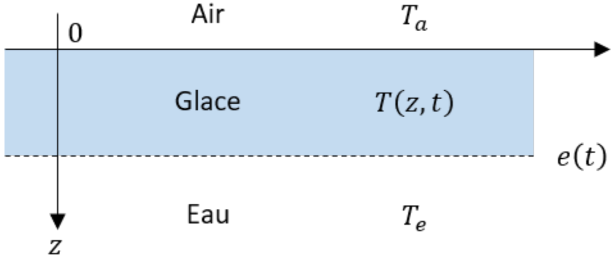
Gel d'un lac

On étudie la formation de glace à la surface d'un lac. L'air est à la température $T_a = -10$ °C et l'eau à la température $T_e = 0$ °C. L'épaisseur de glace est notée $e(t)$ et sa température $T_g(z,t)$ pour $0 < z < e(t)$.



On note λ_g la conductivité thermique de la glace, c_g sa capacité thermique massique et ρ_g sa masse volumique. À l'instant t, on considère un cylindre de section S compris entre z et $z + dz$ dans la glace. On néglige la convection.

Données : caractéristiques de la glace

- Conductivité thermique $\lambda_g = 2{,}1 \ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
- Masse volumique $\rho_g = 917 \ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
- Enthalpie de fusion $\ell_{fus} = 333 \ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T_g(z,t)$.

Correction

On applique le premier principe sur un tranche de glace de longueur dx.

$$d^2H = \rho_g c_g S dx \big[T_g(x, t+dt) - T_g(x,t)\big] = \big[j_{th}(x,t) - j_{th}(x+dx,t)\big] S dt$$

Ainsi,

$$\rho_g c_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}$$

Avec la loi de Fourier :

$$\boxed{\rho_g c_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T_g}{\partial x^2}}$$

2) On se place en régime quasi-stationnaire. Donner l'expression de $T_g(z,t)$ en fonction de T_a, T_e, $e(t)$ et z.

Correction

On se place en régime quasi-stationnaire, c'est-à-dire que $e(t)$ varie suffisamment lentement pour que le profil de température dans la glace due à la diffusion est le temps de s'établir comme si e était constant.

En régime stationnaire :

$$\frac{d^2 T_g}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_g(z,t) = T_a + (T_e - T_a)\frac{z}{e(t)}}$$

3) En déduire l'expression de la densité surfacique de flux thermique : $j_{th}(e)$.

Correction

D'après la loi de Fourier :

$$\boxed{j_{th} = -\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial x} = \frac{\lambda (T_a - T_e)}{e}}$$

On s'intéresse à l'augmentation de l'épaisseur de glace $e(t)$.

4) Écrire le premier principe sur l'eau qui va congeler entre t et $t + dt$, d'épaisseur de. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $e(t)$. On supposera que l'énergie libérée par la solidification de la glace est évacuée vers le haut.

Correction

On applique le premier principe (version enthalpique car pression constante) sur la tranche d'eau qui va se solidifier pendant dt.

$$dH = \delta Q \quad \text{avec :} \quad \delta Q = j_{th} S dt \quad \text{et} \quad dH = -\ell_{fus} dm = -\ell_{fus} \rho_g S de$$

Ainsi,

$$-\ell_{fus} \rho_g S de = \frac{\lambda (T_a - T_e)}{e} S dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{e \frac{de}{dt} = \frac{\lambda (T_e - T_a)}{\ell_{fus} \rho_g}}$$

5) La résoudre avec $e(t = 0) = 0$.

Correction

On intègre en l'instant initial et un instant quelconque :

$$\int_0^{e(t)} e\ de = \int_0^t \frac{\lambda\,(T_e - T_a)}{\ell_{fus}\rho_g}\ dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{e(t) = \sqrt{\frac{2\lambda\,(T_e - T_a)}{\ell_{fus}\rho_g}\ t}}$$

6) Déterminer l'épaisseur formée au bout d'une journée, d'une semaine et d'un mois. Commenter.

Correction

AN :

$$\begin{cases} \text{1 jour :} & e = 11 \text{ cm} \\ \text{1 semaine :} & e = 29 \text{ cm} \\ \text{1 mois :} & e = 60 \text{ cm} \end{cases}$$

La glace se forme rapidement les premiers jours. En revanche, l'énergie libéré par la solidification a de plus en plus de mal à s'évacuer au fur et à mesure que l'épaisseur augmente. La couche de glace devient donc de plu en plus isolante, rendant très compliqué une solidification sur tout le volume.