# Champ électromagnétique d'un faisceau de particules

On considère un faisceau homocinétique (ie. qui ont la même vitesse) de particules chargées. La géométrie du faisceau est cylindrique de rayon $R$, infinie selon l'axe $(\mathrm{O}z)$. Les particules portent la charge $q$ et sont animées par rapport au référentiel galiléen du laboratoire d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ constante. La densité volumique de particules est notée $n$.

## Champ électrique

1) Préciser l'expression de la densité de charge $\rho$ dans le faisceau.

**Correction**

On a :

$$\boxed{\rho = nq}$$

2) Déterminer l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$ en tout point de l'espace.

**Correction**

On se place en coordonnées cylindres $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$. Soit un point $\mathrm{M} = (r, \theta, z)$ quelconque de l'espace.

La distribution de charge est invariante par translation selon $\overrightarrow{u}_z$ et par rotation autour de $(\mathrm{O}z)$. Donc le champ électrique l'est également.

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{E}(r)$$

Le plans $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$ et $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Donc $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ appartient à l'intersection de ces plans.

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = E(r)\,\overrightarrow{u}_r$$

On prend comme surface de Gauss un cylindre de hauteur $h$ et de rayon $r$. Sa surface se décompose en trois parties : supérieure $\overrightarrow{dS}_{sup} = dS\,\overrightarrow{u}_z$, inférieure $\overrightarrow{dS}_{inf} = -dS\,\overrightarrow{u}_z$ et latérale $\overrightarrow{dS}_{lat} = dS\,\overrightarrow{u}_r$.

Le théorème de Gauss assure que :

$$\oiint \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \underbrace{\iint_{S_{sup}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS}_{sup}}_{=\,0 \text{ car } \overrightarrow{E}\,\perp\,\overrightarrow{dS}_{sup}} + \underbrace{\iint_{S_{inf}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS}_{inf}}_{=\,0 \text{ car } \overrightarrow{E}\,\perp\,\overrightarrow{dS}_{inf}} + \iint_{S_{lat}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS}_{lat} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

On rappelle que la surface latérale du cylindre vaut : $S_{lat} = 2\pi r h$

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi r h \varepsilon_0}$$

On distingue alors les cas où $r \leq R$ et $r \geq R$.

$$Q_{int}(r \leq R) = \pi r^2 h \rho \quad \text{et} \quad Q_{int}(r \geq R) = \pi R^2 h \rho$$

Conclusion :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \begin{cases} \dfrac{nqr}{2\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u}_r & \text{si : } r \leq R \\ \dfrac{nqR^2}{2r\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u}_r & \text{si : } r \geq R \end{cases}}$$

## Champ magnétique

3) Préciser l'expression de la densité de courant dans le faisceau.

**Correction**

On a :

$$\boxed{\overrightarrow{j} = nq\overrightarrow{v}}$$

4) Déterminer l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ en tout point de l'espace.

**Correction**

La distribution de courant est invariante par translation autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ et par rotation autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$. Donc $\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{B}(r)$.

Le plan $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant. Donc $\overrightarrow{B}$ est orthogonal à ce plan. Ainsi :

$$\overrightarrow{B}(M) = B(r)\,\overrightarrow{u}_\theta$$

On applique le théorème de théorème d'Ampère sur un cercle d'axe (O$z$), de rayon $r$, et orienté de sorte que $\overrightarrow{d\ell} = rd\theta\overrightarrow{u_\theta}$.

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \mu_0 I_{int}$$

Puisque l'intégrale porte sur la variable $\theta$, le champ $\overrightarrow{B}(r)$ est constant et peut sortir de l'intégrale. Ainsi :

$$B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I_{int} \quad \text{avec :} \quad I_{int} = \begin{cases} j\pi r^2 & \text{si : } r \leq R \\ j\pi R^2 & \text{si : } r \geq R \end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 nqvr}{2}\,\overrightarrow{u_\theta} & \text{si : } r \leq R \\ \dfrac{\mu_0 nqvR^2}{2r}\,\overrightarrow{u_\theta} & \text{si : } r \geq R \end{cases}}$$

## Champ électromagnétique

On admet que : $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ où $c$ est la célérité de la lumière dans le vide.

5) À l'aide des relations trouvées précédemment, exprimer $\overrightarrow{B}$ en fonction de $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{E}$ et $c$, qui soit valable en tout point de l'espace.

**Correction**

On remarque que l'on a la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{E}}{c^2}}$$