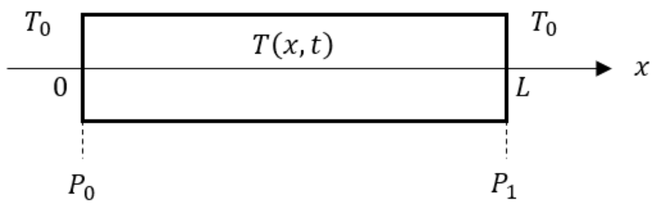
Régime transitoire dans une barre

Un matériau solide de conductivité thermique λ et de coefficient de diffusion thermique D supposés constantes est limité par deux faces planes P_0 et P_1. La longueur de l'échantillon est L et on considère seulement des transferts thermiques unidimensionnels dans la direction x en l'absence de sources d'énergie.

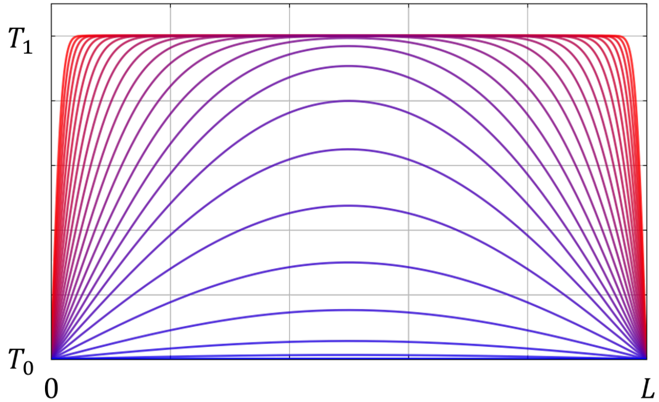


On impose aux plans P_0 et P_1 des températures identiques et constantes égales à T_0 et à l'instant initial, le matériau compris entre $0 < x < L$ est à la température T_1.

1) Intuitivement, tracer l'évolution de la température $T(x,t)$ dans la barre au cours du temps. Préciser l'état final. Donner l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour atteindre l'équilibre thermique.

Correction

Évolution de la température dans la barre : plus le plus augmente, plus la couleur de la courbe passe de rouge à bleue.



On peut décomposer en série de Fourier la fonction $T(x,0)$ définie comme une fonction impaire, $2L$-périodique :

$$T(x,0) = T_0 + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{avec :} \quad f_n(x) = \frac{4\,(T_1 - T_0)}{\pi\,(2n+1)} \sin\left(\frac{(2n+1)\,\pi x}{L}\right)$$

On va traiter chaque terme indépendamment (linéarité de l'équation de diffusion). On cherche une solution de la forme $F_n(x,t) = f_n(x) \times g_n(t)$ qui a comme conditions limites $F_n(0,t) = F_n(L,t) = 0$ et comme conditions initiales $F_n(x,0) = f_n(x)$.

2) Déterminer l'équation vérifiée par $g_n(t)$. Résoudre cette équation.

Correction

La fonction $T(x,t)$ vérifie l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Donc chaque terme $F_n(x,t)$ vérifie également cette équation de diffusion (linéarité de l'équation) :

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 F_n}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad f_n(x)\,\dot{g}_n(t) = D\, f_n''(x)\,g_n(t)$$

On sépare les variables,ce qui permet d'introduire une constante de temps τ_n :

$$\frac{\dot{g}_n}{g_n} = D\,\frac{f_n''}{f_n} = -\frac{1}{\tau_n}$$

On peut résoudre pour g_n :

$$\boxed{\dot{g}_n + \frac{g_n}{\tau_n} = 0} \quad \Rightarrow \quad g_n(t) = A_n e^{-t/\tau_n}$$

Avec les conditions initiales :

$$g_n(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad A_n = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_n(t) = e^{-t/\tau_n}}$$

On résout pour f_n afin de déterminer l'expression de τ_n :

$$f_n'' + k_n^2\, f_n = 0 \quad \text{avec :} \quad k_n = \frac{1}{\sqrt{D\tau_n}} \quad \Rightarrow \quad f_n(x) = B_n\,\cos(k_n x) + C_n\,\sin(k_n x)$$

avec :

$$B_n = 0 \qquad C_n = \frac{4\,(T_1 - T_0)}{\pi\,(2n+1)} \qquad k_n = \frac{(2n+1)\,\pi}{L}$$

On en déduit alors τ_n :

$$k_n = \frac{1}{\sqrt{D\tau_n}} = \frac{(2n+1)\,\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_n = \frac{L^2}{(2n+1)^2\,\pi^2 D}}$$

3) Déterminer explicitement $T(x,t)$. En comparant les temps caractéristiques des différents termes, simplifier $T(x,t)$ pour les temps longs.

Correction

Avec ce qui précède :

$$T(x,t) = T_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\,(T_1 - T_0)}{\pi\,(2n+1)} \sin\left(\frac{(2n+1)\,\pi x}{L}\right) e^{-t/\tau_n}$$

Avec :

$$\tau_0 = \frac{L^2}{\pi^2 D} \qquad \tau_1 = \frac{\tau_0}{9} \qquad \tau_2 = \frac{\tau_0}{25} \qquad \dots \qquad \tau_n = \frac{\tau_0}{(2n+1)^2}$$

On peut garder en première approximation que le fondamental $n = 0$:

$$\boxed{T(x,t) \simeq T_0 + \frac{4\,(T_1 - T_0)}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-t/\tau_0} \quad \text{avec :} \quad \tau_0 = \frac{L^2}{\pi^2 D}}$$

4) En ne conservant que cette solution simplifiée, calculer le flux thermique cédée par la barre comprise en $0 < x < L$.

Correction

La barre cède du flux thermique uniquement en $x = 0$ et $x = L$. Par symétrie du problème, elle cède le même flux en $x = 0$ et $x = L$. Ainsi,

$$\boxed{\phi_{tot} = 2\phi(x = L) = -2\lambda S \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = \frac{8\lambda S}{L}\,(T_1 - T_0)\, e^{-t/\tau_0}}$$