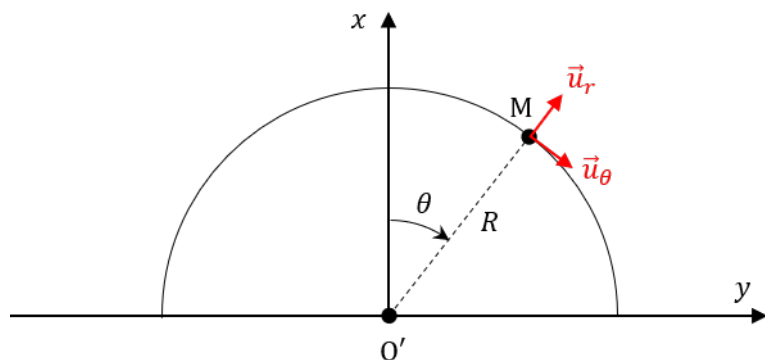


BILLE SUR UNE DEMI-SPHÈRE ACCÉLÉRÉE

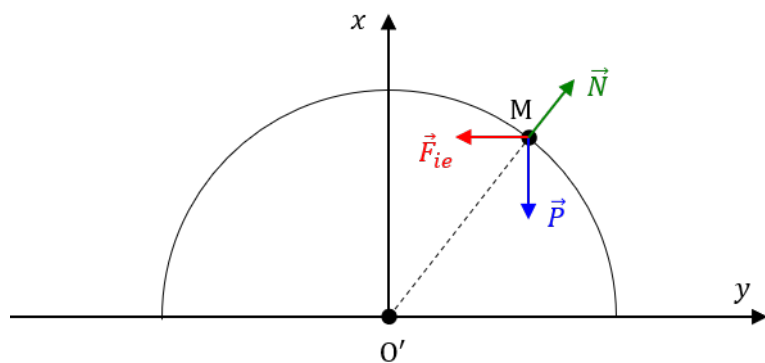
Une bille assimilée à un point matériel M de masse m , en équilibre instable au sommet d'une demi-sphère de rayon R quitte cette position sans vitesse initiale et glisse sans frottement sur la demi-sphère. Cette demi-sphère est soumise à une accélération constante $\vec{a}_0 = a_0 \vec{e}_y$ avec $a_0 > 0$. On définit le référentiel $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au sol et supposé galiléen et le référentiel $\mathcal{R}' = (O', \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié à la demi-sphère.



1) Préciser le mouvement de \mathcal{R}' dans \mathcal{R} et faire un bilan des forces appliquées à M dans \mathcal{R}' . Faire un schéma avec ces forces.

Correction

\mathcal{R}' est en translation accélérée dans \mathcal{R} .



2) Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle que vous exprimerez en fonction de m , a_0 et y dans un premier temps puis en fonction de

m , a_0 , R et θ .

Correction

Force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_0 = -ma_0 \vec{e}_y = -\frac{d}{dy} (ma_0 y) \vec{e}_y$$

On en déduit l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement :

$$\mathcal{E}_{ie} = ma_0 y = ma_0 R \sin(\theta)$$

3) Montrer que dans \mathcal{R}' la bille est un système conservatif et en déduire que la vitesse v de la bille dans ce référentiel s'écrit :

$$v = \sqrt{2gR [1 - \cos(\theta)] - 2a_0 R \sin(\theta)}$$

Correction

La réaction du support \vec{N} ne travaille pas. Le poids \vec{P} et la force d'inertie d'entraînement \vec{F}_{ie} sont conservatives. Donc la bille dans \mathcal{R}' est un système conservatif. On applique le TEM : la différence d'énergie mécanique entre un moment quelconque et le moment initial où la bille est au sommet, sans vitesse, est nulle.

$$\Delta \mathcal{E}_m = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\Delta \mathcal{E}_c} + m g \underbrace{R (\cos(\theta) - 1)}_{\Delta x} - m a_0 \underbrace{R \sin(\theta)}_{\Delta y} = 0$$

On a donc bien :

$$v = \sqrt{2gR [1 - \cos(\theta)] - 2a_0 R \sin(\theta)}$$

4) Déterminer la/les positions d'équilibre θ_e et étudier leur stabilité.

Correction

L'énergie potentielle vaut :

$$\mathcal{E}_p(\theta) = mgR \cos(\theta) + ma_0 R \sin(\theta)$$

On cherche les zéros de sa dérivée première pour trouver les positions d'équilibre.

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = -mgR \sin(\theta_e) + ma_0R \cos(\theta_e) = 0 \Rightarrow \boxed{\tan(\theta_e) = \frac{a_0}{g}}$$

Puisque $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$ et $\tan(\theta_e) > 0$, alors il n'existe qu'une seule position d'équilibre $\theta_e \in [0, +\pi/2]$.

Déterminons le signe de la dérivée seconde pour connaître sa stabilité.

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2} = -mgR \cos(\theta_e) - ma_0R \sin(\theta_e) < 0$$

Cette position est toujours instable.

La bille décolle lorsque $N = 0$ Ainsi :

$$\boxed{\cos(\theta_d) + \frac{a_0}{g} \sin(\theta_d) = \frac{2}{3}}$$

5) Déterminer l'expression de la réaction du support.

Correction

On rappelle l'accélération sur une trajectoire circulaire.

$$\overrightarrow{O'M} = R \vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

On applique le PFD que l'on projette sur chaque axe.

$$\begin{cases} / \vec{u}_r \rightarrow -mR\dot{\theta}^2 = N - ma_0 \sin(\theta) - mg \cos(\theta) \\ / \vec{u}_\theta \rightarrow -mR\ddot{\theta} = -ma_0 \cos(\theta) + mg \sin(\theta) \end{cases}$$

On utilise la projection selon \vec{u}_r et on injecte l'expression de la question 3 avec $v = R\dot{\theta}$. Ainsi :

$$-\frac{m}{R} \left(2gR [1 - \cos(\theta)] - 2a_0R \sin(\theta) \right) = N - ma_0 \sin(\theta) - mg \cos(\theta)$$

On en déduit N :

$$\boxed{N = mg [3 \cos(\theta) - 2] + 3ma_0 \sin(\theta)}$$

6) En déduire l'équation satisfaite par θ_d , l'angle à partir duquel la bille décolle de la demi-sphère. On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

Correction