

CONDUCTEUR CYLINDRIQUE EN RÉGIME STATIONNAIRE

Soit un cylindre conducteur de rayon a , longueur L , conductivité γ parcouru par un courant I . On note (Oz) l'axe du cylindre. Le courant est uniformément réparti en volume : $\vec{j} = \frac{I}{S} \vec{u}_z$. On note U la différence de potentiel entre les deux extrémités du cylindre. Le conducteur est localement neutre : $\rho = 0$.

1) Déterminer la puissance dissipée par effet Joule.

Correction

La puissance volumique cédée par le champ électromagnétique au conducteur s'écrit :

$$\mathcal{P}_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\gamma} = \frac{I^2}{\gamma S^2}$$

Ainsi la puissance totale dissipée par effet joule est :

$$\mathcal{P} = \iiint \mathcal{P}_{vol} dV = \mathcal{P}_{vol} \times SL = \frac{LI^2}{\gamma S}$$

2) Déterminer le champ électrique et magnétique en tout point du cylindre. On négligera les effets de bord.

Correction

Le champ électrique s'obtient simplement via la loi d'Ohm locale :

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{I}{\gamma S} \vec{u}_z$$

Le champ magnétique s'obtient en faisant le théorème d'Ampère (avec un cylindre infini car on néglige les effets de bord). Ici, on est en régime stationnaire donc un théorème d'Ampère statique convient. Comme on l'a vu en magnétostatique :

$$\vec{B} \times 2\pi r = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{S} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2S} \vec{u}_\theta$$

On rappelle l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique :

$$\frac{d\mathcal{E}_{em}}{dt} + \oiint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = - \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} dV$$

3) Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers la surface du conducteur et interpréter.

Correction

Le vecteur de Poynting est par définition :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{I^2 r}{2\gamma S^2} \vec{u}_r$$

On déduit que le flux du vecteur de Poynting à travers la surface (latérale) du conducteur est :

$$\oiint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = -\frac{LI^2}{\gamma S} = -\mathcal{P}$$

On retrouve le fait qu'en régime stationnaire, la puissance échangée du champ électromagnétique à la matière est exactement égal à la puissance transférée au conducteur.