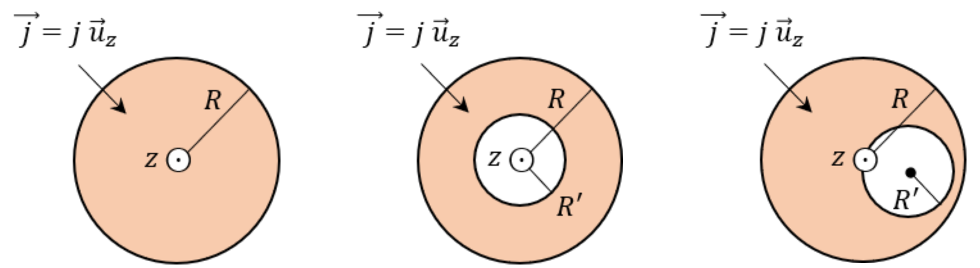
Champ magnétostatique dans une cavité

Un conducteur cylindrique de rayon R, de dimension infinie selon l'axe $(\mathrm{O}z)$, est parcouru par un courant d'intensité constante I. La distribution est modélisée dans un premier temps à l'aide d'une densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ uniforme.



Questions 1 et 3 — Question 2 — Question 4

1) Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}(\mathrm{M})$ créé en tout point M de l'espace, en fonction entre autres de j.

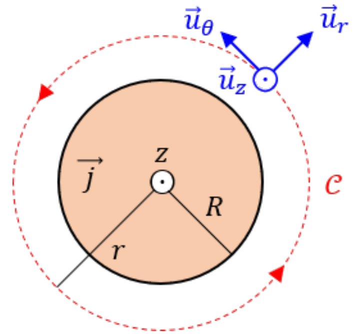
Correction

La distribution de courant est invariante par translation autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ et par rotation autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$. Donc $\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{B}(r)$.

Le plan $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ est un plan de symétrie de la distribution de courant. Donc $\overrightarrow{B}$ est orthogonal à ce plan. Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = B(r)\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

Schéma :



On applique le théorème de théorème d'Ampère sur un cercle d'axe $(\mathrm{O}z)$, de rayon r, et orienté de sorte que $\overrightarrow{d\ell} = rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$.

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \mu_0 I_{int}$$

Puisque l'intégrale porte sur la variable θ, le champ $\overrightarrow{B}(r)$ est constant et peut sortir de l'intégrale. Ainsi :

$$B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I_{int} \quad \text{avec :} \quad I_{int} = \begin{cases} j\pi r^2 & \text{si : } r \leq R \\ j\pi R^2 & \text{si : } r \geq R \end{cases}$$

On en déduit :

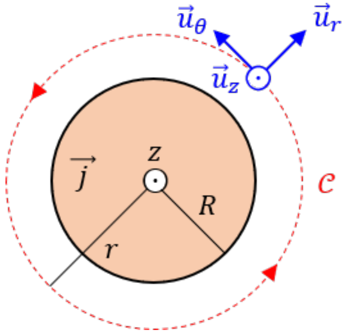
$$\boxed{\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 j r}{2}\,\overrightarrow{u_\theta} & \text{si : } r \leq R \\ \dfrac{\mu_0 j R^2}{2r}\,\overrightarrow{u_\theta} & \text{si : } r \geq R \end{cases}}$$

À l'intérieur du cylindre se trouve une cavité cylindrique creuse de rayon $R' < R$.

2) Supposons les deux cylindre coaxiaux. Déterminer le champ $\overrightarrow{B}(\mathrm{M})$ en tout point de l'espace en appliquant le théorème de superposition.

Correction

On peut considérer la cavité creuse comme étant la superposition du cylindre précédent avec un second cylindre de densité volumique de courant $-\overrightarrow{j}$.



D'après le principe de superposition, le champ total est la superposition des champs créés par chaque cylindre. Ainsi,

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 j r}{2}\vec{u}_\theta - \dfrac{\mu_0 j r}{2}\vec{u}_\theta = \boxed{\vec{0}} & \text{si : } 0 \leq r \leq R' \\ \dfrac{\mu_0 j r}{2}\vec{u}_\theta - \dfrac{\mu_0 j R'^2}{2r}\vec{u}_\theta = \boxed{\dfrac{\mu_0 j}{2}\left(r - \dfrac{R'^2}{r}\right)\vec{u}_\theta} & \text{si : } R' \leq r \leq R \\ \dfrac{\mu_0 j R^2}{2r}\vec{u}_\theta - \dfrac{\mu_0 j R'^2}{2r}\vec{u}_\theta = \boxed{\dfrac{\mu_0 j}{2r}\left(R^2 - R'^2\right)\vec{u}_\theta} & \text{si : } R \leq r \end{cases}$$

3) Ré-exprimer $\vec{B}(M)$ de la question 1 dans le cas où $r < R$ en fonction uniquement de μ_0, $\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM}$.

Correction

On a :

$$\vec{j} = j\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{j} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}} = jr\vec{u}_\theta$$

Pour obtenir un champ en $\vec{u}_\theta$, il faut donc nécessairement passer par un produit vectoriel. Ainsi :

$$\boxed{\vec{B}(r < R) = \frac{\mu_0}{2}\,\vec{j} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$

4) On suppose maintenant que les axes $(\mathrm{O}z)$ et $(\mathrm{O}'z)$ des deux cylindres sont distants de $\mathrm{OO}' = a$ et de sorte que la cavité soit toujours entièrement contenue dans le cylindre de rayon R. Montrer que le champ magnétique est uniforme dans la cavité et déterminer son expression.

Correction

Appliquons de nouveau le principe de superposition, en tenant compte du fait que les centres des cylindre ne sont plus confondus et en utilisant la relation précédente.

$$\vec{B}(\mathrm{M} \in \text{cavité}) = \frac{\mu_0}{2}\,\vec{j} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \frac{\mu_0}{2}\,\vec{j} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O'M}} = \boxed{\frac{\mu_0}{2}\,\vec{j} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OO'}}}$$

Le champ est uniforme dans la cavité, d'autant plus grand que les axes sont éloignés.