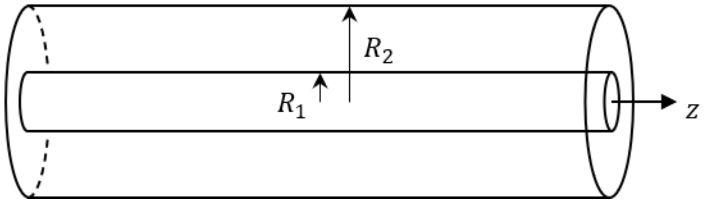
# Propagation dans un câble coaxial

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs de même longueur, l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon $R_1$, appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique de rayon $R_2$ appelé la gaine du conducteur. L'espace inter-conducteur comporte un isolant qu'on assimilera au vide dans un premier temps.




On considère le câble comme infini suivant l'axe des $z$. Une onde électromagnétique se propage à l'intérieur du câble dans la région $r \in [R_1, R_2]$, assimilable à du vide. Elle est définie par son champ électrique :

$$\overrightarrow{E}(r,z,t) = \frac{\alpha}{r}\cos(\omega t - kz)\,\overrightarrow{u_r}$$

où $\alpha$ est une constante positive.

<u>Formulaire</u> : en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\,(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

<u>Données</u> : $R_1 = 1{,}5$ mm et $R_2 = 5{,}0$ mm

1) L'onde est-elle progressive ? Si oui, préciser sa direction de propagation. Est-elle plane ?

**Correction**

L'onde est progressive car $z$ et $t$ sont couplés : $\omega t - kz$. Elle se propage selon $+\overrightarrow{u_z}$ (signe $-$).

L'onde n'est pas plane car dans à plan à $z$ constant, à $t$ fixé, le champ n'est pas constant.

2) On note $E_0$ l'amplitude maximale du champ électrique dans le câble coaxial. Préciser l'unité de $E_0$ et exprimer $\underline{\overrightarrow{E}}(r,z,t)$ en fonction de $E_0$, $r$, $z$, $k$, $\omega$, $t$ et $R_1$.

**Correction**

$E_0$ est en $\mathrm{V\cdot m^{-1}}$

On a immédiatement :

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{E}}(r,z,t) = \frac{E_0 R_1}{r}\,e^{i(\omega t - kz)}\,\overrightarrow{u_r}}$$

3) À partir des équations de Maxwell, retrouver l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique.

**Correction**

D'une part :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) - \Delta\overrightarrow{E} \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{MG}}}{=} -\Delta\overrightarrow{E}$$

D'autre part :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{B}\right)}{\partial t} \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{MA}}}{=} -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}$$

Bilan :

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}}$$

4) L'espace entre l'âme et la gaine est en réalité un diélectrique de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ avec $\varepsilon_r = 2{,}25$. Déterminer alors la vitesse de propagation des OPP.

**Correction**

On remplace $\varepsilon_0$ par $\varepsilon$. On trouve :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 2{,}0\times10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

5) Déterminer en fonction de $E_0$, $r$, $z$, $k$, $\omega$, $t$ et $R_1$ l'expression du champ magnétique complexe associé à cette onde.

**Correction**

Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\underline{\overrightarrow{E}}\right) = -i\omega\underline{\overrightarrow{B}}$$

Avec le formulaire :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\underline{E}}\right) = -ik\ \frac{E_0 R_1}{r}\ e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_\theta}$$

On en déduit :

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{B}} = \frac{E_0 R_1 k}{r\omega}\ e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_\theta}}$$

6) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting.

**Correction**

Attention, il faut repasser aux champ réels !

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} = \frac{k}{\omega\mu_0}\left[\frac{E_0 R_1}{r}\ \cos(\omega t - kz)\right]^2 \overrightarrow{u_z}}$$

7) Déterminer l'expression de la puissance moyenne transportée $\langle \mathcal{P} \rangle$ par la câble.

**Correction**

La puissance à travers une section de câble vaut :

$$\mathcal{P} = \iint \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \overrightarrow{\Pi} \cdot r dr d\theta \overrightarrow{u_z}$$

Après calcul, il vient :

$$\mathcal{P} = \frac{k}{\omega\mu_0}\left[E_0 R_1\ \cos(\omega t - kz)\right]^2 \times 2\pi\ \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

La puissance moyenne vaut donc :

$$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = (E_0 R_1)^2\ \frac{k\pi}{\omega\mu_0}\ \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$