

# CONFINEMENT MAGNÉTIQUE D'UN PLASMA

Les plasmas créés pour réaliser la fusion thermonucléaire ayant des températures extrêmement élevées, ceux-ci ne peuvent être au contact direct de la paroi du réacteur qui fondrait ou serait fortement endommagée. Pour contenir ces plasmas, on doit donc réaliser un confinement immatériel : la méthode la plus étudiée à ce jour est le confinement magnétique. On se propose dans cette partie d'en comprendre le principe par l'étude du mouvement d'une unique particule chargée au sein du plasma : un cation de masse  $m$  et de charge électrique  $+e$  (le cas d'un électron se traitant de manière similaire). On supposera que seule la force magnétique agit sur le cation et qu'aucune collision n'a lieu avec les autres espèces présentes dans le plasma.

## .1) Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

Le champ magnétique nécessaire au confinement du plasma est créé par un solénoïde d'axe ( $Oz$ ) orienté par le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$ , constitué de  $N$  spires de rayon  $a$ , régulièrement réparties sur une longueur  $d \gg a$ . Toutes les spires sont parcourues par un courant d'intensité  $I$  constante (figure 1).

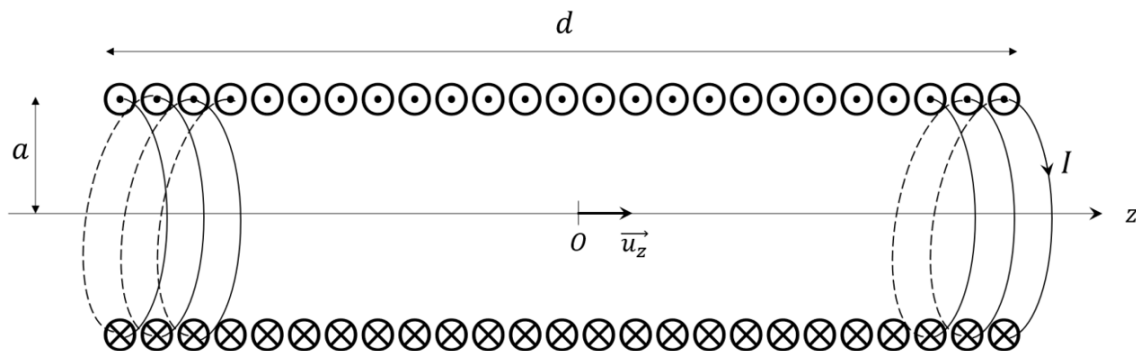


FIGURE 1 – Schéma du solénoïde. Seules quelques spires sont représentées par souci de lisibilité

1) Montrer que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est de la forme  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ , avec  $B_0$  une constante qu'on exprimera, entre autres, en fonction de l'intensité  $I$ . On admettra que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde et on négligera les effets de bord.

### Correction

On se place en coordonnées cylindres  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . Soit un point  $M = (r, \theta, z)$  quelconque de l'espace.

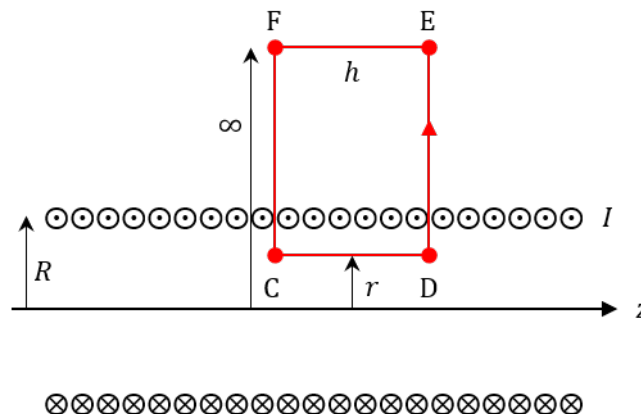
La distribution de courant est invariante par translation selon  $\vec{u}_z$  et par rotation autour de  $(Oz)$ . Donc le champ magnétique l'est également.

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$$

Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est un plan de symétrie de la distribution de courant. Donc  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan.

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$$

On prend comme contour d'Ampère un rectangle CDEF avec CD situé à une distance  $r$  de l'axe ( $Oz$ ) et EF situé à une distance  $\infty$  de l'axe.



Le théorème d'Ampère assure que :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \underbrace{\int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{= B(r)h} + \underbrace{\int_{DE} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{= 0 \text{ car } \vec{B} \perp d\vec{\ell}} + \underbrace{\int_{EF} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{= 0 \text{ car } B(\infty) = 0} + \underbrace{\int_{FG} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{= 0 \text{ car } \vec{B} \perp d\vec{\ell}} = \mu_0 i_{int}$$

Enfin,

$$i_{int} = \begin{cases} nhI & \text{si : } r < a \\ 0 & \text{si : } r > a \end{cases} \Rightarrow \vec{B}(M) = \begin{cases} \mu_0 n I \vec{u}_z & \text{si : } r < a \\ \vec{0} & \text{si : } r > a \end{cases}$$

On s'intéresse maintenant au mouvement d'un cation de masse  $m$  et de charge électrique  $+e$  à l'intérieur de ce solénoïde, soumis au champ  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ .

2) Montrer que la puissance de la force magnétique est nulle. En déduire que l'énergie cinétique du cation se conserve. Par la suite, on notera  $v_0$  la norme constante de la vitesse du cation au cours de son mouvement.

**Correction**

Puissance de la force magnétique :

$$\mathcal{P}_{mag} = \vec{F}_{mag} \cdot \vec{v} = \left( q \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\perp \vec{v}} \right) \cdot \vec{v} = 0$$

Le théorème de l'énergie cinétique affirme donc que :

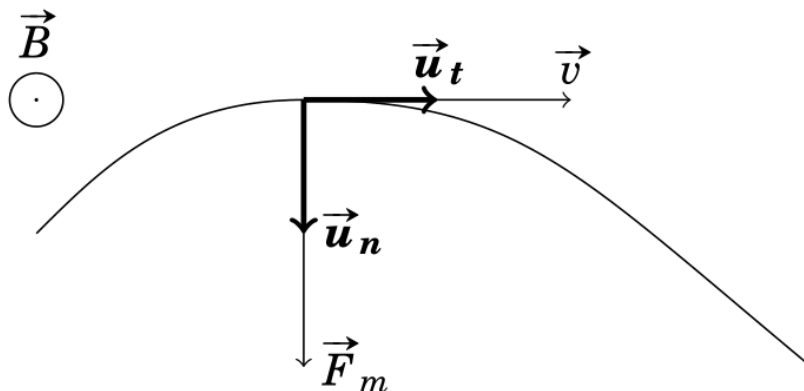
$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}_{mag} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = cte \Rightarrow \boxed{v = cte}$$

On suppose d'abord que le cation a un mouvement dans un plan perpendiculaire au champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ .

3) Représenter sur un schéma le vecteur vitesse  $\vec{v}$  du cation, le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  perpendiculaire au plan de la feuille et la force magnétique  $\vec{F}_m$ . Esquisser la courbure de la trajectoire puis représenter les vecteurs unitaires du repère de Frenet.

**Correction**

La base de Frenet est constitué du vecteur  $\vec{u}_t$  tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de la vitesse, et du vecteur  $\vec{u}_n$  orthogonal à la trajectoire et orienté vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire.



4) Donner l'expression de l'accélération du cation dans le repère de Frenet en fonction de sa vitesse  $v_0$  et du rayon de courbure  $r$  de la trajectoire. Montrer que la trajectoire du cation est circulaire, de rayon  $r_L = \frac{v_0}{\omega_c}$  appelé rayon de Larmor,

avec  $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$  la pulsation cyclotron.

**Correction**

Dans le repère de Frenet :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \vec{u}_n$$

Or ici la norme de la vitesse est constante donc,

$$\vec{a} = \frac{v_0^2}{r} \vec{u}_n$$

Par application du PFD :

$$m \vec{a} = m \frac{v_0^2}{r} \vec{u}_n = e \vec{v} \wedge \vec{B} = e v_0 B_0 \vec{u}_n \Rightarrow \boxed{r_L = \frac{v_0}{\omega_c} \text{ avec : } \omega_c = \frac{e B_0}{m}}$$

Les facteurs  $v_0$ ,  $B_0$ ,  $e$  et  $m$  sont constants, donc le rayon de de courbure l'est aussi. La trajectoire est donc circulaire.

On suppose maintenant que le cation possède une vitesse initiale  $v_0$  parallèle au champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ .

5) En projetant le principe fondamental de la dynamique selon  $\vec{u}_z$ , montrer que la composante  $v_z$  de la vitesse du cation selon  $\vec{u}_z$  est constante. En déduire que le mouvement est rectiligne. Peut-on affirmer que le cation est confiné?

**Correction**

Si  $\vec{B}$  est selon  $\vec{u}_z$  alors la force magnétique est orthogonale à  $\vec{u}_z$ . Il n'y a aucune accélération selon  $\vec{u}_z$  donc la composante  $v_z$  de la vitesse du cation selon  $\vec{u}_z$  est constante. Si la vitesse initiale vaut  $v_0$  et est selon  $\vec{u}_z$  alors la force magnétique est constamment nulle et le mouvement est rectiligne. La particule part alors vers  $z \rightarrow \infty$  : le mouvement n'est pas confiné.

Pour une vitesse initiale quelconque du cation, le mouvement est une combinaison du mouvement circulaire perpendiculaire au champ magnétique et du mouvement rectiligne parallèle au champ magnétique : la trajectoire est alors hélicoïdale.

6) Actuellement, la majorité des recherches sur le confinement magnétique portent sur les tokamaks, pour lesquels les bobines produisant le champ magnétique ne forment pas un cylindre (comme pour le solénoïde) mais un tore (figure 2), qui est un cylindre refermé sur lui-même. Le confinement magnétique du plasma est donc assuré par les bobines toroïdales. Quelle raison a conduit à retenir une géométrie toroïdale?

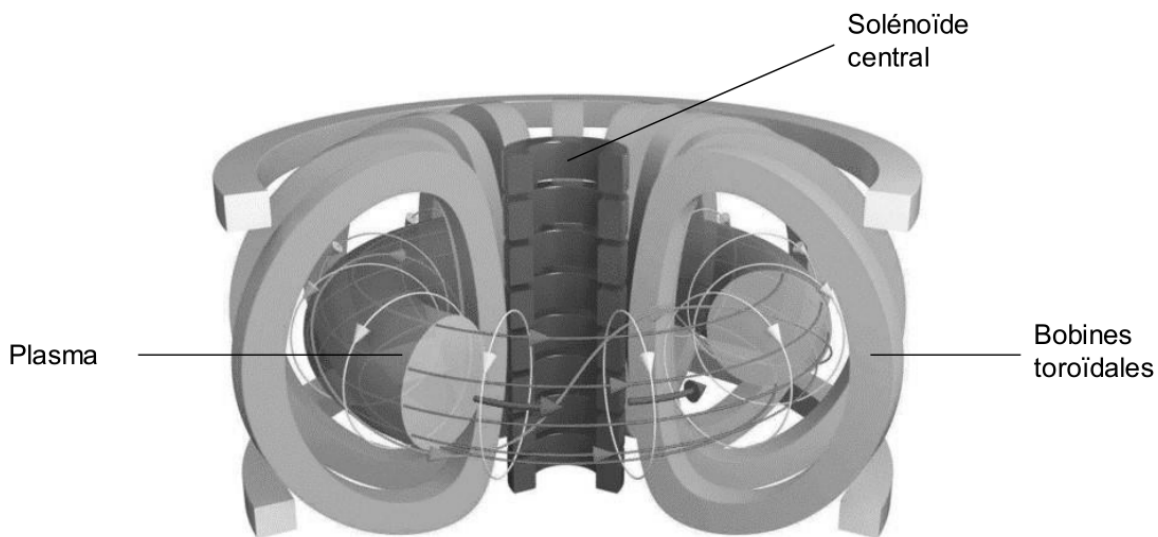


FIGURE 2 – Schéma d'un tokamak

**Correction**

D'après ce qui précède, la particule chargée décrit une hélice suivant l'axe du champ magnétique. Dans cette configuration toroïdale, cet axe est en fait replié sur lui-même, formant une boucle : la particule est désormais confinée dans le dispositif.

7) Calculer le rayon de Larmor d'un cation d'hélium  ${}^4_2\text{He}^+$  (masse  $m = 6,6 \times 10^{-27}$  kg) de vitesse  $v_0 = 3 \times 10^5$  m · s<sup>-1</sup> dans le tokamak d'ITER produisant un champ magnétique  $B_0 = 12$  T. Commenter, sachant que les rayons internes des bobines toroïdales sont de 2 m à l'horizontale et de 3,4 m à la verticale.

**Correction**

Application numérique :  $r_L \simeq 1$  mm. Ce rayon est très petit devant les dimensions du dispositif.

## .2) Bouteille magnétique

Lors des premières recherches sur la fusion contrôlée, il a été envisagé de confiner le plasma à l'aide d'une « bouteille magnétique », qui est un solénoïde dont le rayon des spires diminue lorsqu'on se rapproche de ses bords. L'allure des lignes

de champ dans une bouteille magnétique est représentée sur la figure 3.

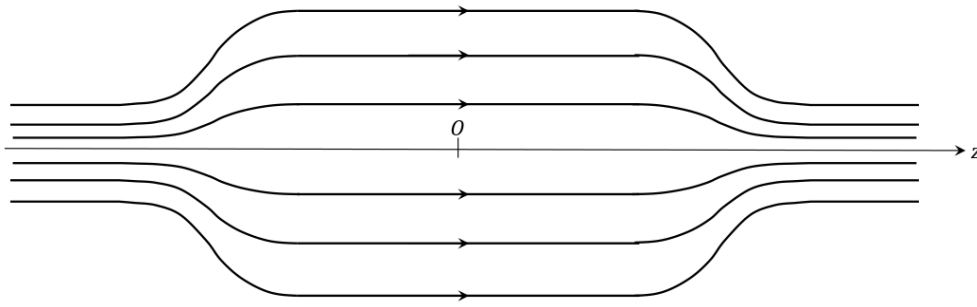
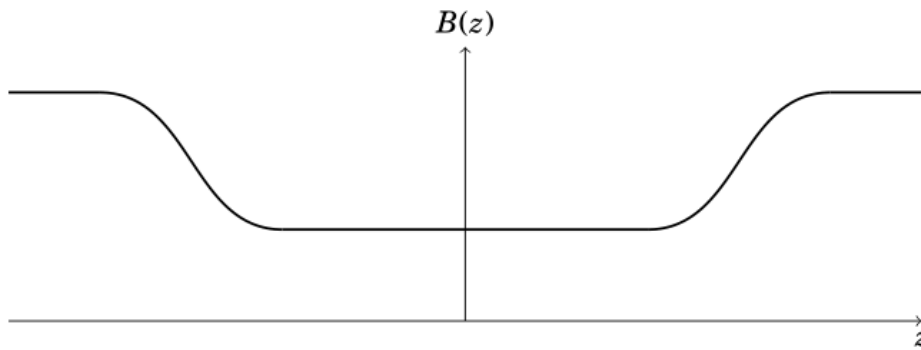


FIGURE 3 – Lignes de champ d'une bouteille magnétique

8) Comment évolue qualitativement l'intensité du champ magnétique lorsqu'on se rapproche des bords de la bouteille magnétique (c'est-à-dire lorsque  $|z|$  augmente)? Représenter graphiquement l'allure de la norme du champ magnétique  $B(z)$  sur l'axe  $(Oz)$ .

**Correction**

Sur les bords de la bouteille magnétique, les lignes de champ sont plus serrées donc le champ est plus intense (la justification n'est pas demandée, mais ceci est dû à la conservation du flux magnétique car  $\text{div}(\vec{B}) = 0$ ).

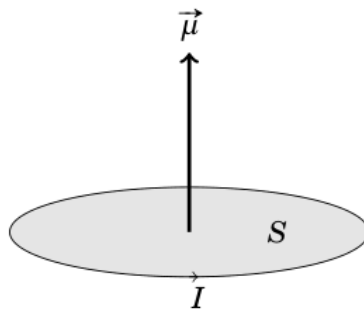


On s'intéresse au mouvement d'un cation de masse  $m$  dans cette bouteille magnétique autour d l'axe  $(Oz)$ . Son vecteur vitesse est  $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ , où  $\vec{v}_\perp$  désigne la vitesse dans le plan perpendiculaire à  $\vec{u}_z$ , et  $\vec{v}_\parallel$  la vitesse selon  $\vec{u}_z$ .

9) Rappeler, schéma à l'appui, la définition du moment magnétique  $\vec{\mu}$  d'une boucle de courant plane.

**Correction**

Par définition, le moment magnétique d'une boucle de courant plane est  $\vec{\mu} = I\vec{S} = IS\vec{n}$  où  $I$  est le courant qui la parcourt,  $S$  la surface délimitée par la boucle, et  $\vec{n}$  le vecteur normal à la surface, orienté positivement par rapport au courant.



10) Au voisinage de l'axe  $(Oz)$ , le champ magnétique est localement uniforme et orienté selon  $\vec{u}_z$  :  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ . Dans cette question, on suppose comme dans la Q4 que le mouvement du cation est circulaire, uniforme et de vitesse  $v_\perp$ , perpendiculairement au champ magnétique. Montrer que le moment magnétique  $\vec{\mu}$  associé au cation a pour expression :

$$\vec{\mu} = -\frac{mv_\perp^2}{2B}\vec{u}_z$$

**Correction**

Calculons d'abord le courant. Comme le proton fait un tour par période, le courant vaut :

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega_c}{2\pi} = \frac{ev_{\perp}}{2\pi r_L}$$

Mais en reprenant le schéma de la Q3, on constate que le mouvement se fait dans le sens inverse du sens trigonométrique. Comme la surface vaut  $S = \pi r_L^2$ , on obtient :

$$\vec{\mu} = -\pi r_L^2 \frac{ev_{\perp}}{2\pi r_L} \vec{u}_z = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \vec{u}_z$$

L'expression du moment magnétique établie à la Q10 reste en première approximation valable malgré les déplacements du cation selon l'axe (Oz). En outre, on peut montrer que ce moment magnétique reste constant au cours du mouvement. Ainsi, le cation peut être assimilé à un dipôle magnétique rigide se déplaçant selon l'axe (Oz), auquel on associe une énergie potentielle de la forme :  $\mathcal{E}_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ .

11) Montrer que  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \mathcal{E}_p$  est une constante. Quelle signification physique peut-on donner aux termes  $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$  et  $\mathcal{E}_p$  au point de vue du dipôle magnétique ?

**Correction**

Avec ce qui précède :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2}$$

Ainsi,

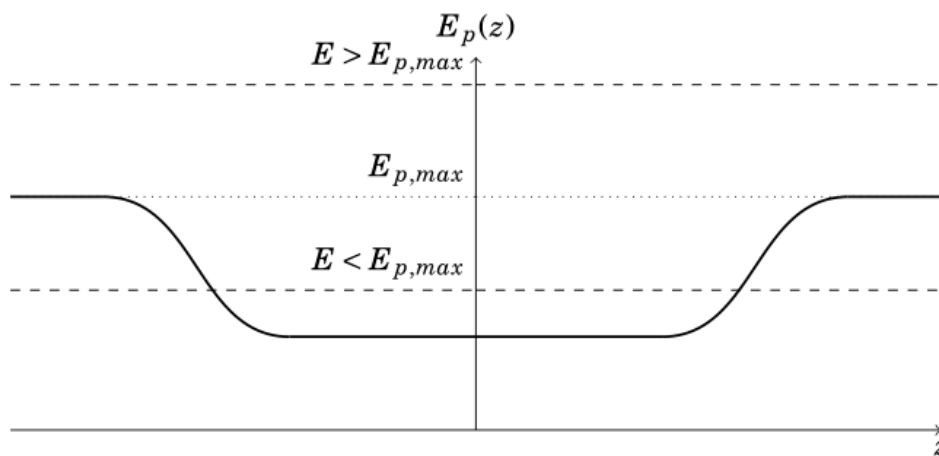
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) = \frac{1}{2}mv^2$$

n'est autre que l'énergie cinétique totale de la particule, dont on a démontré qu'elle était constante. Le terme  $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$  est son énergie cinétique pour son mouvement selon l'axe. Si on interprète ceci du point de vue du dipôle se déplaçant selon (Oz),  $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$  est son énergie cinétique et  $\mathcal{E}$  son énergie mécanique. On s'est ramené à un problème à 1D selon (Oz).

12) Tracer l'allure de  $\mathcal{E}_p(z)$ . Discuter qualitativement les différents mouvements possibles du cation dans la bouteille magnétique en fonction de la valeur de  $\mathcal{E}$  (états libres ou états liés). Dans quel cas peut-on dire que la bouteille magnétique se comporte comme un « miroir magnétique », c'est-à-dire que le cation repart dans la direction opposée sur les bords de la bouteille ?

**Correction**

$\mathcal{E}_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = +\mu B$  car  $\vec{\mu}$  est constant et orienté selon  $-\vec{u}_z$ . Le profil est donc proportionnel à celui dessiné plus haut.



Si  $\mathcal{E}_p < \mathcal{E}_{p,max}$ , seule la zone où  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_p$  est accessible : la particule est confinée, dans un état lié. Elle est réfléchiée à chaque extrémité. Sinon (si  $\mathcal{E}_p > \mathcal{E}_{p,max}$ ) elle est dans un état libre.

13) Quel défaut présente la bouteille magnétique pour le confinement du plasma ?

**Correction**

Si  $\mathcal{E}_p > \mathcal{E}_{p,max}$ , c'est-à-dire si la particule est trop rapide, elle n'est plus confinée et peut s'échapper du dispositif.