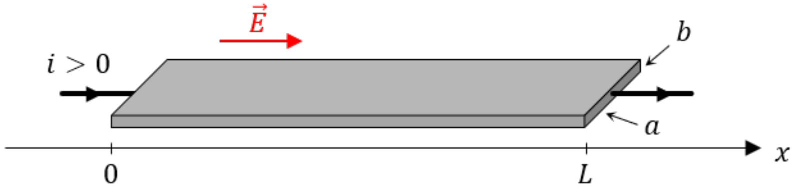
Effet Hall

On considère une plaque conductrice parallélépipédique de largeur a, d'épaisseur b et de longueur L traversée par un courant d'intensité $i > 0$ uniformément réparti sur sa surface $S = a \times b$.

La plaque constitue un milieu homogène isotrope de conductivité γ, comprenant des électrons mobiles de densité volumique n. Ces électrons de masse m et de charge $-e$ sont tous supposés se déplacer à la même vitesse $\overrightarrow{v}$. Ils sont soumis à l'action d'un champ électrique $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_x}$ responsable de leur mise en mouvement.

On modélise les interactions des électrons mobiles avec le milieu lors de leur déplacement par une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$, avec α un coefficient caractéristique du milieu. On négligera le poids des particules devant les autres forces.



1) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à un électron pour établir l'équation différentielle reliant le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$ et le champ électrique $\overrightarrow{E}$. Faire apparaître une constante de temps τ.

Correction

On rappelle le lien entre $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{j} = -ne\overrightarrow{v}$$

On applique le principe fondamentale de la dynamique sur un électron.

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -e\overrightarrow{E} - \alpha\overrightarrow{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\overrightarrow{j}}{dt} + \frac{\overrightarrow{j}}{\tau} = \frac{ne^2}{m}\overrightarrow{E} \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{m}{\alpha}}$$

2) Montrer qu'en régime stationnaire, on obtient la loi $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$, où l'on donnera l'expression de γ en fonction de τ, m , e et n. Quel nom porte cette loi ?

Correction

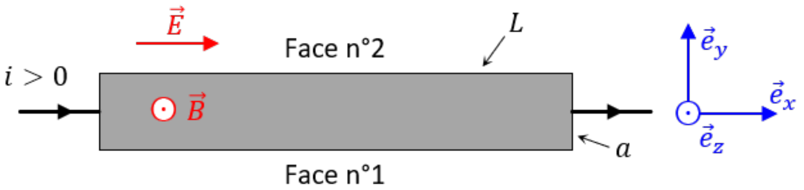
En régime stationnaire,

$$\frac{\overrightarrow{j}}{\tau} = \frac{ne^2}{m}\overrightarrow{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E} \quad \text{avec :} \quad \gamma = \frac{ne^2\tau}{m}}$$

Il s'agit de la loi d'Ohm locale.

Remarque : τ correspond au temps caractéristique entre deux chocs des électrons avec le milieu.

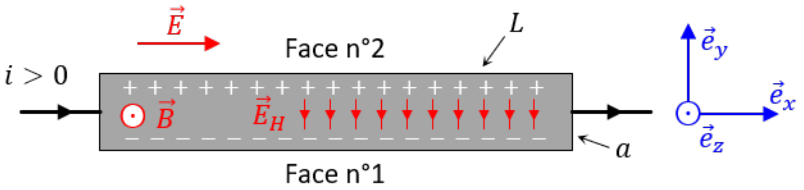
On soumet désormais la plaque à un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$. Sous l'effet de ce champ magnétique, il y a une accumulation d'électrons mobiles sur une face et, par conséquent, un défaut d'électrons sur l'autre face.



3) Reproduire le schéma et y représenter les symboles « + » et « − » indiquant l'accumulation de charges positives et négatives sur les faces. Justifier alors l'apparition d'un champ électrique $\overrightarrow{E_H} = E_H\overrightarrow{u_y}$ orthogonal aux lignes de courant i, appelé champ de Hall. Dessiner sur le schéma l'allure des lignes de champ.

Correction

Le courant est positif selon $+\overrightarrow{u_x}$, donc le électrons se déplacent selon $-\overrightarrow{u_x}$. La force magnétique de Lorentz $\overrightarrow{F}_{mag} = -e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ impose alors une force selon $-\overrightarrow{u_y}$. Il y a donc accumulation de charges négatives sur la face n°1 et positives sur la face n°2.



Les lignes de champ sont orientées des charges positives vers les charges négatives.

4) Déterminer la nouvelle équation différentielle vérifiée par $\vec{j}$. Introduire la pulsation cyclotron ω_c, à exprimer en fonction de e, B et m.

Correction

On rajoute la force magnétique de Lorentz.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) - \alpha\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{\vec{j}}{\tau} + \omega_c\vec{j} \wedge \vec{u}_z = \frac{ne^2}{m}\vec{E}}$$

$$\text{avec : } \boxed{\omega_c = \frac{eB}{m}}$$

On se place en régime stationnaire, et on suppose que a est suffisamment faible pour que la conduction se produise quasi-exclusivement selon $\vec{u}_x$. Ainsi, $\vec{j} \propto \vec{u}_x$.

5) Déterminer l'expression du champ de Hall E_H en fonction de ω_c, τ et E. En déduire l'expression de la résistance de Hall, définie par :

$$R_H = \frac{U_H}{i}$$

où U_H est la différence de potentielle (tension de Hall) entre les deux faces, induite par le champ de Hall.

Correction

En régime stationnaire et avec $\vec{j} \propto \vec{u}_x$, la projection de l'équation précédente dans la base cartésienne donne :

$$\begin{cases} \dfrac{j}{\tau} = \dfrac{ne^2}{m}E \\ -\omega_c j = \dfrac{ne^2}{m}E_H \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_H = -\omega_c\tau E}$$

On en déduit la tension de Hall :

$$U_H = \int_0^a dV = -\int_0^a \vec{E}_H \cdot d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \int_0^a \omega_c\tau E\, dy = \omega_c\tau E a$$

Or,

$$i = jS = jab = \gamma Eab \quad \Rightarrow \quad U_H = \omega_c\tau\frac{i}{\gamma ab}a \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_H = \frac{\omega_c\tau}{b\gamma}}$$

6) En quoi la mesure de la tension de Hall peut-être utile ?

Correction

Mesurer cette tension permet de mesurer le champ magnétique. C'est le principe du teslamètre.

Remarque : Dans un conducteur cette tension est trop petite pour être mesurée. Mais dans un semi-conducteur cette tension est mesurable avec les voltmètres usuels, d'où l'intérêt des semi-conducteurs dans les sondes à effet hall pour mesurer la valeur d'un champ magnétique ($R_H \propto B$).