

RÉSISTANCE EN GÉOMÉTRIE CYLINDRIQUE

On considère deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 , de hauteur h , portés aux potentiels respectifs V_1 et V_2 sont séparés par un milieu conducteur. On désire exprimer la résistance électrique équivalente et l'énergie électrique dissipée. On néglige tout effet de bord.

1) En notant I l'intensité du courant circulant entre les cylindres de façon radiale, et en supposant qu'on est en régime stationnaire, exprimer la densité volumique de courant $\vec{j}(r)$ en fonction de I .

Correction

Le courant traversant un cylindre de rayon r et de hauteur h vaut :

$$I = \iint \vec{j}(r) \cdot d\vec{S}$$

avec : $\vec{j}(r) = j(r) \vec{u}_r$ et $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$. L'intégrale porte sur les variables θ et z , donc $j(r)$ est constant. Ainsi,

$$I = j(r) \times S = j(r) \times 2\pi r h \Rightarrow \vec{j}(r) = \frac{I}{2\pi r h} \vec{u}_r$$

2) En déduire l'expression du champ électrique en tout point.

Correction

Avec la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{I}{2\pi \gamma r h} \vec{u}_r$$

3) En déduire l'expression de la résistance électrique R .

Correction

La différence de potentielle vaut :

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} dV = \int_{R_1}^{R_2} \text{grad}(V) \cdot d\vec{OM} = - \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot dr \vec{u}_r$$

car : $\vec{E} = -\text{grad}(V)$.

Ainsi,

$$V_1 - V_2 = \frac{I}{2\pi \gamma h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \Rightarrow R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{1}{2\pi \gamma h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

4) Calculer la puissance dissipée par effet Joule de deux manières différentes :

- à l'aide de la loi d'Ohm macroscopique ;
- à l'aide de la loi d'Ohm locale.

Correction

Avec la loi d'Ohm macroscopique :

$$\mathcal{P} = RI^2 = \frac{I^2}{2\pi \gamma h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Avec la loi d'Ohm locale. La puissance volumique vaut :

$$\mathcal{P}_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\gamma} = \frac{I^2}{(2\pi r h)^2 \gamma}$$

On intègre sur tout le conducteur pour en déduire la puissance :

$$\mathcal{P} = \iiint \mathcal{P}_{vol} dV = \iiint \mathcal{P}_{vol} \times r dr d\theta dz = \frac{I^2}{2\pi \gamma h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

5) En admettant que l'épaisseur $e = R_2 - R_1$ est très faible devant chacun des rayons, proposer une expression simplifiée pour l'expression de la résistance. Commenter.

Correction

En posant $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$, on a :

$$R = \frac{1}{2\pi \gamma h} \ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) \simeq \frac{e}{2\pi \gamma h R_1}$$

On retrouve l'expression de la résistance en cartésien (d'un pavé droit) :

$$R = \frac{L}{\gamma S} \quad \text{avec : } L = e \quad \text{et } S = 2\pi R_1 h$$

où e est l'épaisseur et $2\pi R_1 h$ la surface du cylindre intérieur.