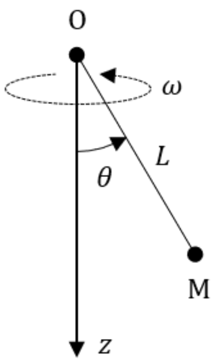
Pendule en rotation

On considère un pendule simple en rotation à la vitesse angulaire constante ω. Le fil inextensible a une longueur L, et le point matériel M possède une masse m. Après un régime transitoire que l'on ne cherchera pas à décrire, le pendule se stabilise à un angle θ constant.

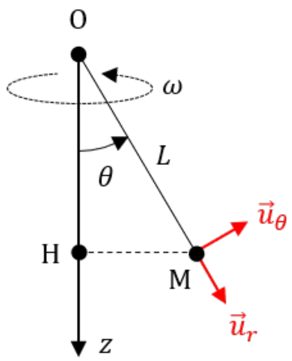


On se place dans le référentiel tournant non galiléen.

1) Exprimer θ en fonction de g, ω et L.

Correction

En régime permanent, la position de M est fixe dans le référentiel tournant : vitesse et accélération sont donc nulles.



Bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} = mg\,\vec{u}_z = mg\left[\cos(\theta)\,\vec{u}_r - \sin(\theta)\,\vec{u}_\theta\right] \\ \vec{T} = -T\,\vec{u}_r \\ \vec{f}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}} = m\omega^2 L\,\sin(\theta)\,\left[\cos(\theta)\,\vec{u}_\theta + \sin(\theta)\,\vec{u}_r\right] \\ \vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega}\wedge\vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Le PFD projeté selon $\vec{u}_\theta$ donne donc :

$$0 = -mg\,\sin(\theta) + m\omega^2 L\,\sin(\theta)\cos(\theta) \quad\Rightarrow\quad m\omega^2 L\,\sin(\theta)\times\left[\cos(\theta) - \frac{g}{\omega^2 L}\right] = 0$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 L}\right)}$$

2) En déduire que cela n'est possible que pour une valeur minimum de ω.

Correction

Cette solution ne peut exister que si

$$\frac{g}{\omega^2 L} < 1 \quad\Rightarrow\quad \omega > \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Dans le cas contraire, il existe en réalité une autre solution au PFD écrit précédemment :

$$\sin(\theta) = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\theta = 0}$$