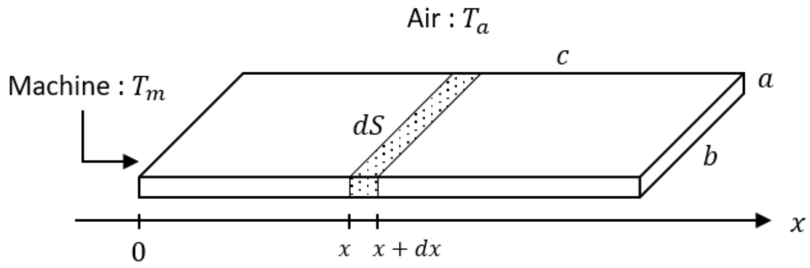
Ailette de refroidissement rectangulaire

Pour éviter un échauffement trop important d'un appareil électrique, on munit l'arrière de son boîtier d'ailettes de refroidissement métalliques.

Chaque ailette est parallélépipédique, d'épaisseur $a = 2{,}0$ mm, de largeur $b = 10$ cm et de longueur $c = 12$ cm. On considérera $a \ll b$ dans les calculs.



En fonctionnement permanent, le boîtier de l'appareil maintient une température $T_m = 60$ °C. L'air extérieur est à la température constante et uniforme $T_a = 20$ °C.

On suppose que la température est uniforme dans les directions y et z, et que le transfert de chaleur se fait par conduction selon l'axe x : $T(x)$ dans l'ailette. La conductivité thermique de l'ailette est $\lambda = 20\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Il existe un transfert thermique des surfaces latérales vers l'air ambiant, décrit par la loi de Newton :

$$d\phi = h\,(T(x) - T_a)\ dS$$

où $h = 180\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ est le coefficient de transfert conducto-convectif.

1) Établir un bilan d'énergie sur une tranche d'épaisseur dx.

Correction

On applique le premier principe version enthalpique (car transformation monobare) sur une tranche dx de l'ailette, entre les instant t et $t + dt$. Il existe en flux thermique par conduction en x, en $x + dx$ et un flux conducto-convectif sur la surface latérale $dS = 2dx\,(a+b) \simeq 2bdx$.

$$\begin{aligned} d^2H &= \rho ab\ dx\,(T(x,t+dt) - T(x,t)) \\ &= ab\,(j(x,t) - j(x+dx,t))\,dt - h\,(T(x,t) - T_a)\,2bdxdt \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\rho ab\ dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = -ab \frac{\partial j}{\partial x} dxdt - h\,(T - T_a)\,2bdxdt$$

Avec la loi de Fourier et après simplification :

$$\boxed{\rho a \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2h\,(T - T_a)}$$

2) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température en régime permanent. On fera apparaître une longueur caractéristique δ. Comparer δ et c.

Correction

En régime permanent :

$$\lambda a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2h\,(T - T_a) = 0$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2} \quad \text{avec :} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}} = 1\ \text{cm} \ll c}$$

3) Résoudre cette équation et donner l'expression de $T(x)$ compte tenu de l'inégalité entre δ et c.

Correction

Solution générale :

$$T(x) = T_a + A\ e^{-x/\delta} + B\ e^{x/\delta}$$

Or $\delta \ll c$, donc : $T(x = c) \simeq T(+\infty) = T_a$. On en déduit $B = 0$.

De plus, par continuité de la température en $x = 0$, on en déduit :

$$\boxed{T(x) = T_a + (T_m - T_a)\, e^{-x/\delta}}$$

4) Exprimer la puissance thermique $\mathcal{P}_0$ transmise par le boîtier de l'appareil à l'ailette en $x = 0$.

Correction

Calculons le flux thermique en $x = 0$.

$$\mathcal{P}_0 = ab\ j(x=0) = -\lambda ab\ T'(x=0) = \boxed{\frac{\lambda ab}{\delta}\,(T_m - T_a)}$$

5) Exprimer la puissance thermique $\mathcal{P}_e$ évacuée par l'ailette. Conclure.

Correction

Calculons le flux thermique transféré à l'air sue toute la surface de l'ailette. Avec nos hypothèses, l'ailette est supposée infinie et la surface vaut

$$\mathcal{P}_e = \int_0^\infty h\,(T - T_a)\ 2bdx = 2bh\,(T_m - T_a)\int_0^\infty e^{-x/\delta}dx = \boxed{2bh\,(T_m - T_a)\,\delta}$$

En régime permanent, on doit avoir $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_e$. En effet :

$$\mathcal{P}_0 = \lambda ab\frac{T_m - T_a}{\delta} = b\sqrt{2h\lambda a}\,(T_m - T_a) = 2bh\,(T_m - T_a)\,\delta = \mathcal{P}_e$$

6) Combien d'ailettes faut-il fixer sur le boîtier pour évacuer une puissance totale $\mathcal{P}_{tot} = 200$ W ?

Correction

AN : $\mathcal{P}_0 = 15$ W. Ainsi :

$$\frac{\mathcal{P}_{tot}}{\mathcal{P}_0} = 13,3$$

Il faut 14 ailettes.