Propagation d'une OPPM dans un métal

On étudie la propagation des ondes électromagnétiques dans un métal de conductivité γ.

Donnée : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$

1) Rappeler l'équation de conservation de la charge. En la couplant à une équation de Maxwell, trouver une équation satisfaite par la densité volumique de charge $\rho(\mathrm{M}, t)$. Quel est le temps typique de disparition de la charge ? L'évaluer le cuivre de conductivité $\gamma = 5 \times 10^7\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$. Que peut-on en conclure ?

Correction

Conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\overrightarrow{j}\right) = 0$$

Avec la loi d'Ohm locale : $\overrightarrow{j} = \gamma \overrightarrow{E}$ et Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{E}\right) = \rho/\varepsilon_0$, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0 \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} = 10^{-19}\ \mathrm{s}}$$

Les charges se dissipent en quelques 10^{-19} s dans un bon conducteur. On suppose donc que $\rho = 0$ dans la suite. Cela est vrai si $\omega \ll \dfrac{1}{\tau} = 10^{19}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

2) Exprimer, en ordre de grandeur, le rapport entre les densités volumiques de courant de déplacement et de conduction pour un champ électrique de pulsation ω. À quelle condition sur la pulsation peut-on négliger le premier devant le second ? On supposera désormais que c'est le cas.

Correction

En ordre de grandeur :

$$\frac{j_D}{j} = \frac{\varepsilon_0 \omega E}{\gamma E} = \omega \tau$$

Tant que $\omega \ll \dfrac{1}{\tau} = 10^{19}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, on peut négliger le courant de déplacement.

3) Écrire l'équation de propagation du champ électrique dans le conducteur. Que laisse présager la présence d'une dérivée d'ordre impair ? Comment s'appelle cette équation ?

Correction

D'une part :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) - \Delta \overrightarrow{E} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{MG}}}{=} -\Delta \overrightarrow{E}$$

D'autre part :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{MF}}}{=} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{B}\right)}{\partial t} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{MA}}}{=} -\mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

Bilan :

$$\boxed{\Delta \overrightarrow{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}}$$

La dérivée première par rapport au temps implique une équation non réversible (temporellement), donc un phénomène irréversible. On reconnaît une équation de diffusion du champ électrique.

4) On prend $\overrightarrow{E}$ de la forme : $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0\ e^{i\left(\omega t - \underline{k}\, x\right)} \overrightarrow{u_z}$. En déduire la relation de dispersion dans le métal. On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.

Correction

On injecte la solution dans l'équation précédente.

$$-\underline{k}^2 = i\omega\mu_0\gamma \quad \Rightarrow \quad \underline{k}^2 = \omega\mu_0\gamma\ e^{-i\pi/2} \quad \Rightarrow \quad \underline{k} = \pm\sqrt{\omega\mu_0\gamma}\ e^{-i\pi/4}$$

Ainsi,

$$\boxed{\underline{k} = \pm \frac{1-i}{\delta} \quad \text{avec :} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}}$$

5) Écrire l'expression la plus générale du champ $\overrightarrow{E}$.

Correction

Par linéarité des équations de Maxwell, la solution générale est la somme des deux solutions trouvées précédemment.

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0\ e^{i(\omega t - (1-i)x/\delta)} \overrightarrow{u_z} + E_1\ e^{i(\omega t + (1-i)x/\delta)} \overrightarrow{u_z}$$

En réel :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = E_0\ e^{-x/\delta}\ \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\overrightarrow{u_z} + E_1\ e^{x/\delta}\ \cos\left(\omega t + \frac{x}{\delta}\right)\overrightarrow{u_z}}$$

6) À quoi correspond la partie réelle de $\underline{k}$? Qu'en est-il de sa partie imaginaire ? Commenter la forme de l'onde dans un métal. L'onde se propage-t-elle ? Est-elle évanescente ? Interpréter physiquement δ appelée « épaisseur de peau ».

Correction

La partie réelle correspond à la propagation, la partie imaginaire à l'atténuation.

L'onde $E_0\ e^{-x/\delta}\ \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\overrightarrow{u_z}$ se propage selon les x croissants, elle est atténuée sur une distance caractéristique δ.

L'onde $E_1\ e^{x/\delta}\ \cos\left(\omega t + \frac{x}{\delta}\right)\overrightarrow{u_z}$ se propage selon les x décroissants, elle est atténuée (car se propage selon les x décroissants) sur une distance caractéristique δ.

7) Expliquer pourquoi la porte d'un four micro-ondes contient une mince couche métallique. Quelle est la condition sur δ pour que la porte stoppe le rayonnement du four ?

Correction

Le four à micro-ondes contient une mince couche métallique contient une couche métallique d'épaisseur quelques δ afin d'atténuer fortement les micro-ondes.