

ONDES STATIONNAIRES ENTRE DEUX PLAQUES

Deux plans parfaitement conducteurs sont situés en $x = 0$ et $x = a$.

On se propose d'étudier une onde électromagnétique stationnaire, plane, monochromatique, à polarisation rectiligne dans le vide entre ces deux plans :

$$\vec{E} = E_0 f(x) \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

On suppose que \vec{E} est nul sur les plans infinis.

Formulaire :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A}$$

1) Retrouver l'équation différentielle vérifiée par \vec{E} . En déduire l'équation différentielle vérifiée par $f(x)$.

Correction

Le milieu inter-plaques étant vide : $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$. On prend le rotationnel de MF :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E}))}_{= 0 \text{ (MG)}} - \Delta \vec{E} \underset{\text{MF}}{=} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) \right] \underset{\text{MA}}{=} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On en déduit :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0$$

2) Déterminer la fonction $f(x)$ et montrer que la pulsation ω est quantifiée.

Correction

La solution est :

$$f(x) = A \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) + B \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$$

La condition aux limites en $x = 0$ impose :

$$f(0) = 0 = A$$

La condition aux limites en $x = a$ impose :

$$f(a) = 0 = B \sin\left(\frac{\omega a}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_k a}{c} = k\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{a} \quad \text{avec : } k \in \mathbb{N}^*$$

Finalement, si E_0 représente l'amplitude du champ, alors $B = 1$. Donc :

$$f(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \quad \text{avec : } k \in \mathbb{N}^*$$

3) Calculer le champ magnétique \vec{B} .

Correction

Le champ électrique vaut donc :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{k\pi ct}{a}\right) \vec{u}_y$$

On rappelle l'expression du rotationnel en cartésien :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \vec{u}_z$$

On utilise l'équation de MF :

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = E_0 \frac{k\pi}{a} \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{k\pi ct}{a}\right) \vec{u}_z$$

On primitive. La constante d'intégration est nulle car le champ magnétique doit être de moyenne nulle.

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi ct}{a}\right) \vec{u}_z$$

4) Calculer le vecteur de Poynting moyen ainsi que l'énergie électromagnétique volumique moyenne.

Correction

Le vecteur de Poynting vaut :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{E_0^2}{4\mu_0 c} \sin\left(\frac{2k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2k\pi ct}{a}\right) \vec{u}_x$$

La valeur moyenne (temporelle) est donc nulle : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$

C'est bien une onde stationnaire.

L'énergie électromagnétique volumique vaut :

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \left[\sin^2\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{k\pi ct}{a}\right) + \cos^2\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{k\pi ct}{a}\right) \right]$$

Donc en valeur moyenne :

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \left[\sin^2\left(\frac{k\pi x}{a}\right) + \cos^2\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \right] = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}$$