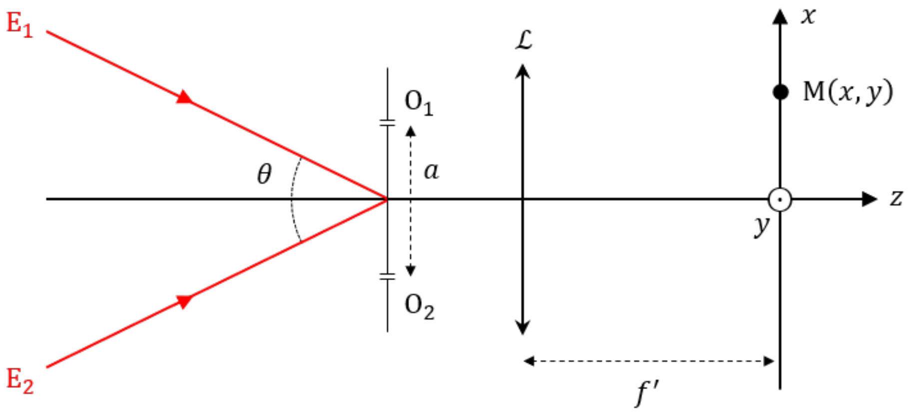
Taille angulaire d'une étoile double

Une étoile double est un système composé de deux étoiles E_1 et E_2, que l'on supposera identiques, en orbite l'une autour de l'autre. Elles sont espacées par un écart angulaire θ.

Pour mesurer cet écart, le physicien français Fizeau (1819-1896) a proposé de placer un écran percé de deux fentes fines identiques, parallèles, d'écartement variable a, devant l'objectif d'un télescope (qu'on représentera par une lentille convergente) muni d'un filtre ne laissant passer que les radiations de longueur d'onde λ issues des sources E_1 et E_2. L'observation se fait sur un écran placé dans le plan focal image de l'objectif.



Formulaire :

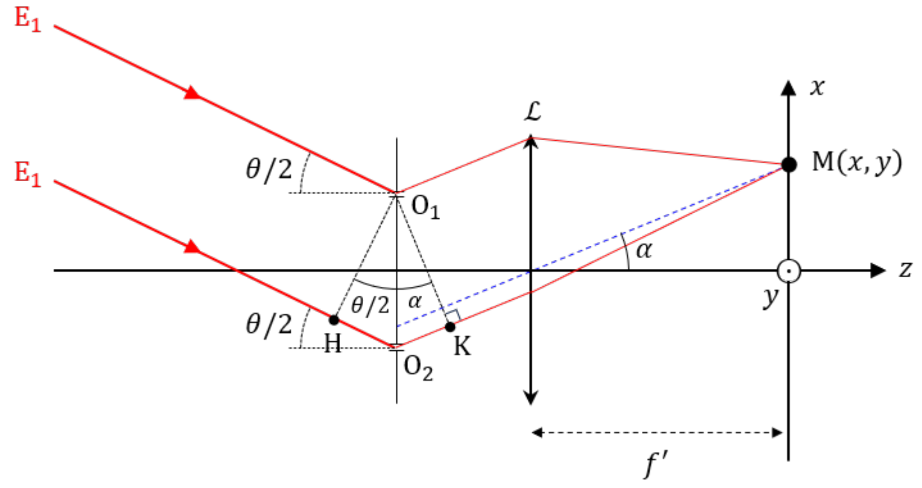
$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

On suppose pour l'instant qu'un cache est positionné de manière à bloquer les rayons en provenance de l'étoile E_2.

1) Recopier le schéma et tracer les rayons issus de E_1 qui interfèrent au point M.

Correction

L'étoile E_1 étant à l'infini, elle envoie des rayons parallèles faisant un angle $\theta/2$. On trace le rayon fictif qui passe par M et le centre de la lentille (pointillés bleus). Les rayons émergents des trous d'Young sont parallèles à ce rayon fictif. Après la lentilles, tous les rayons se croisent en M (car M est dans le plan focal image de la lentille).



2) Déterminer l'intensité lumineuse I_1 observée sur l'écran.

Correction

On a :

$$\begin{aligned}\delta_1 &= (E_1O_2M) - (E_1O_1M)\\ &= \Big[(E_1O_2) + (O_2M)\Big] - \Big[(E_1O_1) + (O_1M)\Big]\\ &= \underbrace{(E_1O_2) - (E_1O_1)}_{=\,\delta_{1E}} + \underbrace{(O_2M) - (O_1M)}_{=\,\delta_{1M}}\end{aligned}$$

Or, à l'aide du théorème de Malus, on a :

$$\begin{cases}\delta_{1E} = HO_2 = a\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & \text{avec : } \quad \theta \ll 1 \text{ rad}\\ \delta_{1M} = O_2K = a\sin(\alpha) & \text{avec : } \quad \alpha \ll 1 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) \simeq \tan(\alpha) = \dfrac{x}{f'}\end{cases}$$

Ainsi, avec la formule de Fresnel :

$$\boxed{I_1 = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta_1\right)\right) \quad \text{avec : } \quad \delta_1 = \frac{a\theta}{2} + \frac{ax}{f'}}$$

3) De même, déterminer l'intensité lumineuse I_2 observée sur l'écran lorsqu'on met un cache pour bloquer les rayons en provenance de l'étoile E_1.

Correction

De même :

$$\delta_2 = \underbrace{(\mathrm{E_2O_2}) - (\mathrm{E_2O_1})}_{=\,\delta_{2\mathrm{E}}} + \underbrace{(\mathrm{O_2M}) - (\mathrm{O_1M})}_{=\,\delta_{2\mathrm{M}}} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \delta_{2\mathrm{E}} = -\delta_{1\mathrm{E}} \\ \delta_{2\mathrm{M}} = \delta_{1\mathrm{M}} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{I_2 = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta_2\right)\right) \quad \text{avec :} \quad \delta_2 = -\frac{a\theta}{2} + \frac{ax}{f'}}$$

4) En déduire l'intensité lumineuse totale I_{tot} observée sur l'écran lorsque le dispositif est éclairé par les deux étoiles.

Correction

Les deux étoiles sont incohérentes, on somme donc les intensités. Avec le formulaire, on obtient après simplification :

$$\boxed{I_{tot} = I_1 + I_2 = 4I_0\left[1+\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi a\theta}{2\lambda}\right)}_{\text{contraste}}\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'}\right)}_{\text{interférences}}\right]}$$

On observe des franges d'interférence pour a « très faible » et on augmente progressivement a jusqu'à la valeur a_1 pour laquelle les franges sont complètement brouillées pour la première fois.

5) En déduire l'expression de l'écart angulaire θ en fonction de a_1 et λ.

Correction

Les franges sont complètement brouillées lorsque le terme de contraste s'annule. Cela arrive pour la première fois lorsque :

$$\frac{2\pi a_1\theta}{2\lambda} = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{\lambda}{2a_1}}$$

6) Faire l'application numérique avec $\lambda = 550$ nm et $a_1 = 9{,}8$ cm. Ces étoiles peuvent-elles être distinguées à l'œil nu ? Si non, quel doit être le grossissement d'une lunette astronomique ?

Correction

AN :

$$\boxed{\theta = \frac{\lambda}{2a_1} = 2{,}8\times10^{-6}\ \text{rad}}$$

La limite de résolution de l'œil est de 1 minute d'arc.

$$1' \simeq 3\times10^{-4}\ \text{rad} = \theta\times107$$

Il faut donc au moins un grossissement de 107 pour observer ces étoiles à l'aide d'une lunette astronomique.

Remarque : pour aller plus loin sur le sujet, je vous conseille la vidéo « Interférences en astronomie optique ou interférométrie stellaire dans le visible » retraçant les travaux d'Antoine Labeyrie.