Électrolyte entre les plaques d'un condensateur

Les armatures d'un condensateur plan, portées au potentiel U et $-U$, sont respectivement assimilées à des plans infinis, d'équations $x = a$ et $x = -a$. On note $V(x)$ le potentiel en un point d'abscisse x. On introduit entre les armatures un électrolyte constitué de cations et d'anions de charges individuelles respectives $+q$ et $-q$. En l'absence de champ (ie. pour $U = 0$), les anions et les cations ont la même densité particulaire n_0.

L'ensemble est à l'équilibre thermique à la température T. Dans ce cas, la densité particulaire n de particules qui ont l'énergie $\mathcal{E} = qV$ est donné par la loi de Boltzmann :

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right)$$

où k_B est la constante de Boltzmann.

1) Exprimer la densité volumique de charge ρ en fonction des données et de $V(x)$.

Correction

On a :

$$\rho = qn_+ - qn_- = qn_0 \exp\left(-\frac{qV}{k_B T}\right) - qn_0 \exp\left(\frac{qV}{k_B T}\right) = \boxed{-2qn_0 \,\mathrm{sh}\left(\frac{qV}{k_B T}\right)}$$

2) Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $V(x)$.

Correction

Équation de Poisson :

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{2qn_0}{\varepsilon_0} \,\mathrm{sh}\left(\frac{qV}{k_B T}\right)$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{2qn_0}{\varepsilon_0} \,\mathrm{sh}\left(\frac{qV}{k_B T}\right)}$$

3) Que devient-elle si on suppose $|qV| \ll k_B T$? Cette hypothèse étant supposée réalisée en tout point, déterminer la fonction $V(x)$. On fera apparaître une longueur caractéristique δ que l'on exprimera en fonction de k_B, T, ε_0, n_0 et q.

Correction

Dans ce cas,

$$\mathrm{sh}\left(\frac{qV}{k_B T}\right) \simeq \frac{qV}{k_B T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{V}{\delta^2} \quad \text{avec :} \quad \delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{2q^2 n_0}}}$$

La solution s'écrit :

$$V(x) = A \,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

Les conditions aux limites imposent : $V(a) = U$ et $V(-a) = -U$. On en déduit en particulier que $V(x)$ est impaire et il vient :

$$\boxed{V(x) = U \,\frac{\mathrm{sh}(x/\delta)}{\mathrm{sh}(a/\delta)}}$$

4) Tracer l'allure de la courbe $V(x)$ pour différentes valeurs du paramètre $\alpha = \delta/a$. On prendra par exemple : $\alpha = 5$; 0,3 et 0,01.

Correction

Graphe :