Champ E dans un condensateur en régime variable

On s'intéresse à un condensateur cylindrique de rayon a, dont les armatures d'axe commun (Oz) sont distantes de $\ell \ll a$. Le condensateur est placé en série avec une résistance R et un générateur de tension $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$.

<u>Formulaire</u> : en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

$$\Delta A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) - \Delta\overrightarrow{A}$$

1) Le champ électrique, dans l'espace entre les armatures, est supposé égal à $\overrightarrow{E_0} = E_0\ e^{i\omega t}\overrightarrow{u_z}$. Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ induit dans le condensateur par le champ électrique variable en utilisant le théorème d'Ampère.

Correction

L'étude des symétries et invariances donnent :

$$\overrightarrow{B}(M,t) = B_\theta(r,t)\ \overrightarrow{u_\theta}$$

On applique le théorème d'Ampère généralisé sur un cercle centré sur l'axe (Oz) et de rayon $r \in [a\ , a+\ell]$ (entre les deux armatures). Il n'y a pas de courant entre les armatures, donc $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$. Ainsi :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{B}\right) = \mu_0\overrightarrow{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \oint\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{d\ell} = \mu_0\varepsilon_0\iint\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{dS}$$

Or, en orientant le contour dans le sens direct, on a :

$$\overrightarrow{d\ell} = d\ell\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{dS} = dS\overrightarrow{u_z}$$

Les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont des constantes pour leur intégrale respective. Ils peuvent donc sortir de l'intégrale et on obtient directement :

$$B_\theta(r,t)\cdot 2\pi r = \mu_0\varepsilon_0\cdot\pi r^2\cdot i\omega E_0\ e^{i\omega t} \quad\Rightarrow\quad B_\theta(r,t) = \frac{i\mu_0\varepsilon_0 r\omega E_0}{2}\ e^{i\omega t}$$

<u>Remarque</u> : on aurait pu utiliser le formulaire du rotationnel pour déterminer $\overrightarrow{B}$, comme on va le faire dans la question suivante pour déterminer $\overrightarrow{E}$.

Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{B_1} = \frac{ir\omega E_0}{2c^2}\ e^{i\omega t}\ \overrightarrow{u_\theta}}$$

2) Le champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ étant variable, il est lui-même source d'un champ électrique $\overrightarrow{E_2}$. Déterminer $\overrightarrow{E_2}$ en supposant $\overrightarrow{E_2}(r=0) = \overrightarrow{0}$. En déduire l'expression du champ électrique dans le condensateur sous la forme :

$$\overrightarrow{E} = \left[1 - \alpha\left(\frac{r\omega}{c}\right)^2\right]\overrightarrow{E_0} \quad \text{avec :} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

où α est une constante à déterminer.

Correction

On utilise Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E_2}\right) = -\frac{\partial\overrightarrow{B_1}}{\partial t} = \frac{\mu_0\varepsilon_0 r\omega^2 E_0}{2}\ e^{i\omega t}\ \overrightarrow{u_\theta}$$

Puisque $\overrightarrow{E_2}$ ne dépend que de r (invariance selon z et θ) et que d'après ce qui précède son rotationnel est dirigé selon $\overrightarrow{u_\theta}$, on en déduit (cf. formulaire du rotationnel) qu'il est dirigé selon $\overrightarrow{u_z}$.

$$-\frac{\partial E_{2,z}}{\partial r}\overrightarrow{u_\theta} = \frac{r\omega^2 E_0}{2c^2}\ e^{i\omega t}\ \overrightarrow{u_\theta} \quad\Rightarrow\quad E_{2,z} = -\frac{r^2\omega^2 E_0}{4c^2}\ e^{i\omega t}$$

Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{E_2} = -\frac{r^2\omega^2 E_0}{4c^2}\ e^{i\omega t}\overrightarrow{u_z} = -\frac{1}{4}\left(\frac{r\omega}{c}\right)^2\overrightarrow{E_0}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\alpha = \frac{1}{4}}$$

On peut continuer ce raisonnement : le champ $\overrightarrow{E_2}$ induit un champ $\overrightarrow{B_3}$, qui induit un champ $\overrightarrow{E_4}$, etc. On cherche alors une solution exacte du problème sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(r,t) = E(r)\ e^{i\omega t}\overrightarrow{u_z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{r\omega}{c}\right)^n\ e^{i\omega t}\overrightarrow{u_z}$$

3) Déterminer $\Delta\overrightarrow{E}$ en fonction de $\overrightarrow{E}$.

Correction

On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) - \Delta\overrightarrow{E} = -\Delta\overrightarrow{E}$$

car il n'y a pas de charge ($\rho = 0$) dans le condensateur.

De plus,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\,\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\overrightarrow{E}$$

En égalisant les deux expressions :

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{E} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\overrightarrow{E}}$$

4) En déduire une relation de récurrence entre les a_n, et trouver alors l'expression du champ électrique dans le condensateur.

Correction

Calculons ΔE avec la solution proposée.

$$\begin{aligned}
& & E(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{r\omega}{c}\right)^n \\
\Rightarrow & & \frac{\partial E}{\partial r} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{\omega}{c}\right)^n\ n\ r^{n-1} \\
\Rightarrow & & r\ \frac{\partial E}{\partial r} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{\omega}{c}\right)^n\ n\ r^{n} \\
\Rightarrow & & \frac{\partial}{\partial r}\left(r\ \frac{\partial E}{\partial r}\right) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n\left(\frac{\omega}{c}\right)^n\ n^2\ r^{n-1} \\
\Rightarrow & & \Delta E = \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\ \frac{\partial E}{\partial r}\right) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n\left(\frac{\omega}{c}\right)^n\ n^2\ r^{n-2}
\end{aligned}$$

L'équation de la question précédente assure que :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n\left(\frac{r\omega}{c}\right)^{n-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{r\omega}{c}\right)^n$$

À l'aide d'un changement d'indice des sommes, on obtient :

$$\boxed{a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}}$$

Avec $a_0 = 1$, on retrouve bien $a_2 = -1/4$, puis on trouverait $a_4 = 1/64$, etc.