

# ABSORPTION D'UNE OEM PAR UNE PLAQUE CONDUCTRICE

Cet exercice s'intéresse à l'absorption d'une onde électromagnétique par une plaque métallique semi-infinie dans la direction (Oz) et infinie dans les directions (Ox) et (Oy). La conductivité du métal est notée  $\gamma$ . En  $z = 0$  arrive une onde électromagnétique incidente, partiellement transmise à l'intérieur de la plaque. On cherche cette onde transmise en écriture complexe sous la forme

$$\vec{E}(z, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \quad \text{avec : } \underline{k} = k' - ik''$$

1) Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique au sein du métal, dans l'hypothèse où  $\gamma \gg \varepsilon_0 \omega$  (cas du régime lentement variable).

### Correction

D'une part :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

car  $\rho = 0$  dans un métal. D'autre part :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Dans l'approximation  $\gamma \gg \varepsilon_0 \omega$ , le second terme est négligeable devant le premier.

On a donc :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

2) Établir la relation de dispersion.

### Correction

En injectant la forme d'onde cherchée dans l'équation de propagation, on trouve :

$$-\underline{k}^2 \vec{E} - i\omega \mu_0 \gamma \vec{E} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{k}^2 = -i\omega \mu_0 \gamma$$

3) Réécrire l'expression de  $\vec{E}(z, t)$  en fonction de  $k'$  et  $k''$ , et interpréter leur sens physique.

### Correction

En distinguant les parties réelle et imaginaire de  $\underline{k}$ , l'onde s'écrit :

$$\vec{E}(z, t) = \underline{E}_0 e^{-k''z} e^{i(\omega t - k'z)} \vec{u}_x$$

On en déduit que la partie réelle  $k'$  décrit la propagation de l'onde dans le métal, avec une célérité apparente  $v = \omega/k'$ . La partie imaginaire  $k''$  est quant à elle reliée à l'atténuation de l'onde lors de sa propagation au sein du métal.

4) On cherche une onde se propageant selon  $+\vec{u}_z$ . En déduire l'expression de  $k'$  et  $k''$ , en faisant apparaître une longueur caractéristique  $\delta$ . Préciser l'hypothèse de plaque « semi-infinie » dans la direction (Oz).

### Correction

D'après ce qui précède :

$$\underline{k}^2 = -i\omega \mu_0 \gamma = \omega \mu_0 \gamma e^{-i\pi/2} \quad \Rightarrow \quad \underline{k}^2 = \pm \sqrt{\omega \mu_0 \gamma} e^{-i\pi/4} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu_0 \gamma}$$

L'onde se propageant selon  $+\vec{u}_z$ , on a forcément  $k' > 0$ . C'est donc la racine avec le signe + qu'il faut garder. On en déduit :

$$k' = k'' = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \gamma}{2}} = \frac{1}{\delta}$$

Compte tenu de l'interprétation physique de  $k''$ , on en déduit que le champ électrique s'amortit sur une distance caractéristique  $\delta$  à l'intérieur de la plaque.

Celle-ci peut donc être considérée semi-infinie lorsque son épaisseur est très supérieure à  $\delta$ .

5) Calculer le champ magnétique complexe  $\vec{B}(z, t)$ .

### Correction

L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$-i \underline{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\underline{k} \vec{u}_z \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{1-i}{\omega \delta} \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

6) Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting  $\langle \vec{\Pi} \rangle$ . Interpréter physiquement le résultat : direction, sens, dépendance en  $z$ .

**Correction**

En utilisant les champs complexes,

$$\begin{aligned}\langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left( \vec{E} \wedge \vec{B}^* \right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left( \underline{E}_0 e^{-k''z} e^{i(\omega t - k'z)} \times \frac{1+i}{\omega\delta} \underline{E}_0^* e^{-k''z} e^{-i(\omega t - k'z)} \right) \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y \\ &= \frac{|E_0|^2}{2\mu_0\omega\delta} e^{-2k''z} \vec{u}_z\end{aligned}$$

Avec les notations de l'énoncé :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = |E_0|^2 \sqrt{\frac{\gamma}{8\mu_0\omega}} e^{-2k''z} \vec{u}_z$$

On constate que l'onde transporte de l'énergie au sein du métal dans sa direction de propagation, mais que plus elle avance moins elle porte d'énergie.