Cylindre infini chargé

On considère un cylindre infini d'axe (Oz), de rayon R et de densité volumique de charge ρ uniforme.

1) Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ créé en tout point M de l'espace.

Correction

On se place en coordonnées cylindres $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$. Soit un point $\mathrm{M} = (r, \theta, z)$ quelconque de l'espace.

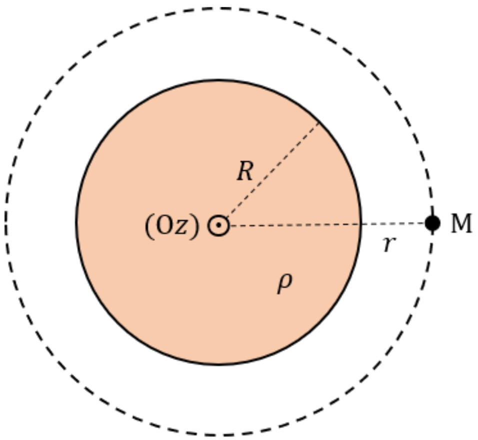
La distribution de charge est invariante par translation selon $\overrightarrow{u_z}$ et par rotation autour de (Oz). Donc le champ électrique l'est également.

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{E}(r)$$

Le plans $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Donc $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ appartient à l'intersection de ces plans.

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = E(r)\,\overrightarrow{u_r}$$

On prend comme surface de Gauss un cylindre de hauteur h et de rayon r. Sa surface se décompose en trois parties : supérieure $\overrightarrow{dS_{sup}} = dS\,\overrightarrow{u_z}$, inférieure $\overrightarrow{dS_{inf}} = -dS\,\overrightarrow{u_z}$ et latérale $\overrightarrow{dS_{lat}} = dS\,\overrightarrow{u_r}$.



Vue de dessus

Le théorème de Gauss assure que :

$$\oiint \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \underbrace{\iint_{S_{sup}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS_{sup}}}_{=\,0 \text{ car } \overrightarrow{E}\,\perp\,\overrightarrow{dS_{sup}}} + \underbrace{\iint_{S_{inf}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS_{inf}}}_{=\,0 \text{ car } \overrightarrow{E}\,\perp\,\overrightarrow{dS_{inf}}} + \iint_{S_{lat}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS_{lat}} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

On rappelle que la surface latérale du cylindre vaut : $S_{lat} = 2\pi r h$

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi r h \varepsilon_0}$$

On distingue alors les cas où $r \leq R$ et $r \geq R$.

$$Q_{int}(r \leq R) = \pi r^2 h\rho \quad \text{et} \quad Q_{int}(r \geq R) = \pi R^2 h \rho$$

Conclusion :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_r} & \text{si : } r \leq R \\ \dfrac{\rho R^2}{2r\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_r} & \text{si : } r \geq R \end{cases}}$$

2) En déduire le potentiel électrostatique $V(\mathrm{M})$ en le choisissant nul en $r = r_0$ (où $r_0 > R$).

Correction

On a :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) \quad \Rightarrow \quad E(r) = -\frac{dV}{dr} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(\mathrm{M}) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}\left(r_0^2 - r^2\right) & \text{si : } r \leq R \\ -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right) & \text{si : } r \geq R \end{cases}}$$

3) Déterminer à l'aide de ce qui précède (sans appliquer de nouveau le théorème de Gauss) le champ électrique $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ créé en tout point M de l'espace par un fil infini chargé, de densité linéique de charge λ uniforme.

Correction

Il suffit de reprendre le résultat de la question 1 (cas où $r \geq R$ puisque $R = 0$ pour un fil) et faire le lien entre la densité volumique ρ et la densité linéique λ.

Soit une hauteur h de cylindre. Cette portion contient une charge totale (deux vision : volumique et linéique) :

$$Q = \pi R^2 h\rho = \lambda h \quad \Rightarrow \quad \rho R^2 = \frac{\lambda}{\pi}$$

Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\ \overrightarrow{u}_r}$$