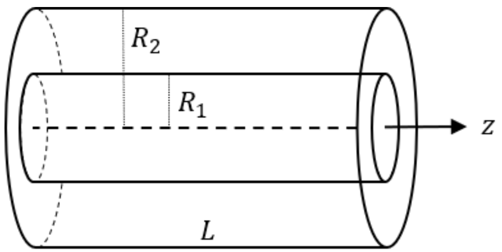
Condensateur cylindrique

On considère condensateur cylindrique constitué de deux armatures cylindriques co-axiales, de rayons R_1 et R_2 et de hauteur L, séparées par du vide. On néglige les effets de bord, ce qui revient à supposer h très grand devant les autres longueurs (hypothèse du cylindre infini). Une charge Q uniformément répartie est présente sur le cylindre intérieur, et une charge $-Q$ sur le cylindre extérieur.



1) Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ créé en tout point M de l'espace.

Correction

On se place en coordonnées cylindres $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$. Soit un point $\mathrm{M} = (r, \theta, z)$ quelconque de l'espace.

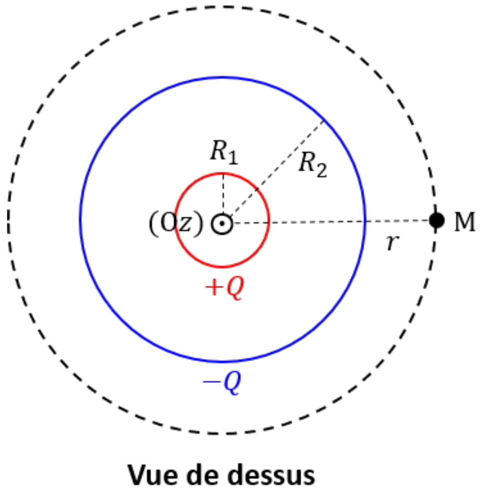
La distribution de charge est invariante par translation selon $\overrightarrow{u}_z$ et par rotation autour de $(\mathrm{O}z)$. Donc le champ électrique l'est également.

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{E}(r)$$

Le plans $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$ et $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Donc $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ appartient à l'intersection de ces plans.

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = E(r)\,\overrightarrow{u}_r$$

On prend comme surface de Gauss un cylindre de hauteur h et de rayon r. Sa surface se décompose en trois parties : supérieure $\overrightarrow{dS}_{sup} = dS\overrightarrow{u}_z$, inférieure $\overrightarrow{dS}_{inf} = -dS\overrightarrow{u}_z$ et latérale $\overrightarrow{dS}_{lat} = dS\overrightarrow{u}_r$.



Le théorème de Gauss assure que :

$$\oiint \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \underbrace{\iint_{S_{sup}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS}_{sup}}_{=\,0 \text{ car } \overrightarrow{E}\,\perp\,\overrightarrow{dS}_{sup}} + \underbrace{\iint_{S_{inf}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS}_{inf}}_{=\,0 \text{ car } \overrightarrow{E}\,\perp\,\overrightarrow{dS}_{inf}} + \iint_{S_{lat}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS}_{lat} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

On rappelle que la surface latérale du cylindre vaut : $S_{lat} = 2\pi r h$.

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi r h \varepsilon_0}$$

On introduit la densité linéique de charge $\lambda = Q/L$ de l'armature positive (l'armature négative possède une densité $-\lambda$). On distingue alors trois cas.

$$Q_{int}(r < R_1) = 0 \qquad Q_{int}(R_1 < r < R_2) = \lambda h = \frac{Qh}{L} \qquad Q_{int}(R_2 < r) = 0$$

Conclusion :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & \text{si : } r < R_1 \\ \dfrac{Q}{2\pi r L \varepsilon_0}\,\overrightarrow{u}_r & \text{si : } R_1 < r < R_2 \\ \overrightarrow{0} & \text{si : } R_2 < r \end{cases}}$$

2) En déduire l'expression de la capacité C du condensateur.

Correction

On rappelle la définition de la capacité d'un condensateur :

$$Q = CU \quad \text{avec :} \quad U = V_+ - V_-$$

Or, entre les deux armatures :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{dV}{dr} \quad \Rightarrow \quad V(r) = -\frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln(r) + cte$$

On en déduit :

$$V_+ - V_- = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{2\pi L\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}}$$