Chauffage d'une piscine par pompe à chaleur

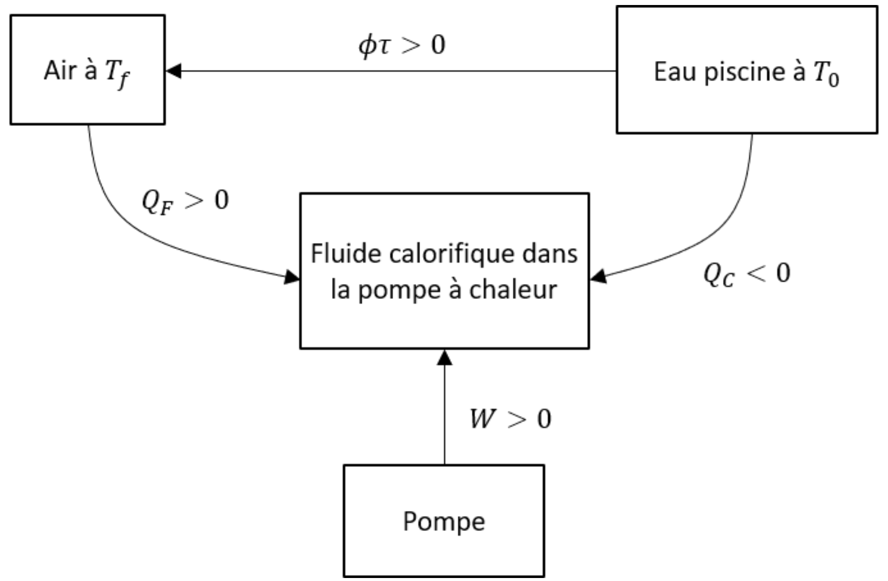
On chauffe l'eau d'une piscine pour la garder à la température $T_0 = 30\,°\mathrm{C}$. On utilise une pompe à chaleur, supposée réversible, travaillant sur des cycles, dont la source chaude est la piscine à la température T_0, et la source froide l'atmosphère supposée isotherme à T_F. On considère que l'eau de la piscine est de masse m et de capacité thermique massique c.

On note ϕ la puissance thermique perdue par la piscine.

1) À l'aide d'un schéma, représenter la source froide, la source chaude, la pompe à chaleur, les échanges énergétiques et leurs signes.

Correction

Schéma de principe :



2) Pendant une durée τ, déterminer Q_C en fonction de ϕ et τ.

Correction

On applique le premier principe sur l'eau de la piscine (version enthalpique car l'eau de la piscine est en contact avec l'atmosphère à pression constante) durant une durée τ.

$$\underbrace{\Delta H + \Delta \mathcal{E}_m}_{=0} = -Q_C - \phi\tau \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_C = -\phi\tau}$$

Membre de gauche nul car régime stationnaire. Ainsi :

3) À l'aide du deuxième principe sur un cycle, déterminer Q_F en fonction de T_F, T_0, ϕ et τ.

Correction

On applique le second principe sur le fluide de la pompe à chaleur sur un cycle.

$$\underbrace{\Delta S}_{=0} = S_e + \underbrace{S_c}_{=0} \quad \text{avec :} \quad S_e = \frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_F = -\frac{T_F Q_C}{T_0} = \frac{T_F \phi\tau}{T_0}}$$

On a : $\Delta S = 0$ car cycle ; $S_c = 0$ car réversible.

4) À l'aide du premier principe, exprimer le travail de la pompe à chaleur W_p.

Correction

On applique le premier principe sur le fluide de la pompe à chaleur sur un cycle.

$$\underbrace{\Delta U}_{=0} = W + Q_F + Q_C \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = -Q_F - Q_C = \phi\tau\left(1 - \frac{T_F}{T_0}\right)}$$

5) Calculer l'efficacité énergétique de la pompe, pour des valeurs de températures : $T_F = 291$ K et $T_C = 303$ K. Faire l'application numérique. Quel est l'intérêt d'une telle pompe à chaleur ?

Correction

Efficacité d'une pompe à chaleur :

$$\boxed{e = \left|\frac{Q_C}{W}\right| = \frac{1}{-T_F/T_0} = 25}$$

On paye donc 1 kWh à EDF pour en chauffer 25 kWh, là où un chauffage direct par effet Joule est de 1 pour 1.

Remarque : pour une pompe à chaleur réelle, l'efficacité est bien moindre !

On suppose désormais que la piscine est initialement à T_F et que la puissance thermique perdue vaut $\phi = \alpha\,(T(t) - T_F)$. On alimente la pompe à chaleur avec une puissance électrique $\mathcal{P}$ constante.

6) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$ de la piscine s'écrit :

$$mc\,\frac{dT}{dt} = -\alpha\left(T(t) - T_F\right) + \frac{\mathcal{P}}{1 - T_F/T(t)}$$

Correction

On reprend les questions dans l'ordre mais en remplaçant T_0 par $T(t)$

Premier principe sur l'eau de la piscine, sur une transformation infinitésimale dt.

$$dH = mc\,dT = -\delta Q_C - \phi dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{mc\,\frac{dT}{dt} = -\frac{\delta Q_C}{dt} - \alpha\left(T(t) - T_F\right)}$$

Second principe sur le fluide de la pompe à chaleur sur un cycle.

$$dS = 0 = \delta S_e = \frac{\delta Q_F}{T_F} + \frac{\delta Q_C}{T(t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta Q_F}{dt} = -\frac{T_F}{T(t)}\,\frac{\delta Q_C}{dt}$$

Premier principe sur le fluide de la pompe à chaleur sur un cycle.

$$dU = 0 = \underbrace{\delta W}_{=\,\mathcal{P}dt} + \delta Q_F + \delta Q_C \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta Q_C}{dt} = -\mathcal{P} + \frac{T_F}{T(t)}\,\frac{\delta Q_C}{dt}$$

Donc :

$$\frac{\delta Q_C}{dt} = -\frac{\mathcal{P}}{1 - T_F/T(t)}$$

On ré-injecte dans la première équation :

$$\boxed{mc\,\frac{dT}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{1 - T_F/T(t)} - \alpha\left(T(t) - T_F\right)}$$