OEM TRANSVERSE DANS UN PLASMA DILUÉ

L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 50 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma : c'est un milieu ionisé, caractérisé par une densité volumique d'électrons libres $n = 10^{10}$ m^{-3} et une densité volumique de cations de charge $+e$ égale elle aussi à n. Le plasma est donc globalement neutre. On se propose d'étudier dans ce milieu la propagation d'ondes du type :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0\ e^{i(\omega t - \underline{k}x)}\overrightarrow{u_y}$$

où $E_0 > 0$, $\omega > 0$ et $\underline{k} \in \mathbb{C}$.

On supposera les électrons non relativistes, le plasma dilué et localement neutre.

1) Déterminer la conductivité complexe $\underline{\gamma}$ du plasma.

Correction

On applique le PFD sur un électron. Il est soumis uniquement à la forme de Lorentz (on néglige les forces de gravités, et les interactions entre particules car plasma dilué). Le plasmaétant dilué, on en déduit que (comme dans le vide) :

$$B \simeq \frac{E}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{eE}{evB} \simeq \frac{c}{v} \gg 1$$

On peut négliger la force magnétique. Ainsi,

$$i\omega m\underline{\overrightarrow{v}} = -e\underline{\overrightarrow{E}}$$

Or,

$$\underline{\overrightarrow{j}} = -ne\underline{\overrightarrow{v}} = \frac{ne^2}{i\omega m}\ \underline{\overrightarrow{E}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\gamma} = \frac{ne^2}{i\omega m}}$$

2) Établir l'équation de propagation des ondes électromagnétiques transverses dans le plasma.

Correction

D'une part :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) - \Delta\overrightarrow{E} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MG}}}{=} -\Delta\overrightarrow{E}$$

D'autre part :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MF}}}{=} \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\ \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{B}\right)}{\partial t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MA}}}{=} -\mu_0\frac{\partial\overrightarrow{j}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}$$

Ainsi,

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 ne^2}{m}\ \overrightarrow{E}}$$

3) En déduire la relation de dispersion. Identifier une pulsation caractéristique appelée pulsation plasma.

Correction

On injecte la solution dans l'équation :

$$-\underline{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\mu_0 ne^2}{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec :} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}}}$$

4) On se place dans le cas où $\omega < \omega_p$. Exprimer le champ réel $\overrightarrow{E}$ et caractériser l'onde obtenue. Décrire alors qualitativement ce que devient une onde électromagnétique envoyée depuis le sol en direction de l'ionosphère.

Correction

Dans ce cas,

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{k} = \pm\frac{i}{\delta} \quad \text{avec :} \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

Ainsi,

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0\ e^{i(\omega t - \underline{k}x)}\overrightarrow{u_y} = E_0\ e^{\pm x/\delta}\ e^{i\omega t}\overrightarrow{u_y}$$

La seule solution physiquement acceptable est celle où l'onde décroît avec la profondeur (rien ne peut amplifier l'onde).

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0\ e^{-x/\delta}\ e^{i\omega t}\overrightarrow{u_y} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{E} = E_0\ e^{-x/\delta}\ \cos(\omega t)\ \overrightarrow{u_y}}$$

On constate que l'onde ne se propage pas (les variables d'espace et de temps ne sont pas couplées). C'est une onde dont l'amplitude décroît lorsque l'on pénètre dans le plasma. On parle d'onde évanescente.

Il est possible de montrer que $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont en quadrature de phase, donc $\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle = \overrightarrow{0}$. L'énergie ne se propage pas dans le plasma. De plus, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{E}$ sont également en quadrature de phase, donc $\langle \mathcal{P}_{vol} \rangle = 0$. L'onde ne cède pas d'énergie au plasma. On en déduit que l'intégralité de l'énergie est réfléchie.

On se place désormais dans le cas où $\omega > \omega_p$.

5) Exprimer le champ réel $\overrightarrow{E}$ et caractériser l'onde obtenue.

Correction

Dans ce cas,

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{k} = k = \pm\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

Ainsi,

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 \; e^{i(\omega t \pm kx)} \overrightarrow{u}_y$$

On veut que l'onde se propage selon les x croissants, donc :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 \; e^{i(\omega t - kx)} \overrightarrow{u}_y \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{E} = E_0 \, \cos(\omega t - kx) \, \overrightarrow{u}_y}$$

Il s'agit d'une OPPH.

6) Le milieu est-il dispersif ? Déterminer le vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g.

Correction

La relation entre k et ω n'est pas linéaire, donc le milieu est dispersif.

Par définition :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c\left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right]^{-1/2}}$$

De plus, la relation de dispersion donne :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad 2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega}$$

Ainsi,

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}}$$