Transparence ultra-violette des métaux

Cet exercice a pour but d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique de haute fréquence à l'intérieur d'un métal, pour laquelle ni la loi d'Ohm statique ni l'ARQS ne sont valables. On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω. Les porteurs de charge dans ce métal sont des électrons de charge $-e$, de masse m, présents en densité volumique n.

Considérons le mouvement d'un électron de conduction du métal, sous l'effet de la force de Lorentz électrique (force magnétique négligeable) et d'une force de friction modélisant les interactions avec le réseau cristallin,

$$\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$$

<u>Données</u> :

- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1{,}26 \times 10^{-6}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$
- Pour un métal usuel : $\gamma_0 = 5 \times 10^{7}\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$ et $\tau = 10^{-14}$ s
- $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$

1) Établir l'expression de la vitesse complexe de l'électron $\underline{\vec{v}}$. En déduire que le métal possède une conductivité complexe $\underline{\gamma}$:

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$$

où γ_0 est une constante dont on donnera l'expression.

Correction

Appliquons le PFD à l'électron dans le référentiel du conducteur, supposé galiléen. Le poids de l'électron étant négligé, on a :

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v} \quad\Rightarrow\quad i\omega m\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} - \frac{m}{\tau}\underline{\vec{v}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\underline{\vec{v}} = -\frac{e\tau/m}{1 + i\omega\tau}\,\underline{\vec{E}}}$$

La densité volumique de courant est reliée à la vitesse des électrons par :

$$\underline{\vec{j}} = -ne\underline{\vec{v}} = \frac{ne^2\tau/m}{1 + i\omega\tau}\,\underline{\vec{E}}$$

Ce qui permet bien d'identifier la conductivité complexe du métal à haute fréquence sous la forme :

$$\boxed{\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \quad \text{avec :} \quad \gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}}$$

2) Écrire l'équation de conservation de la charge complexe. En déduire que le métal reste localement neutre, même à haute fréquence.

Correction

L'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$i\omega\underline{\rho} + \mathrm{div}\left(\underline{\vec{j}}\right) = 0$$

Avec la loi d'Ohm et l'équation de Maxwell-Gauss,

$$i\omega\underline{\rho} + \underline{\gamma}\ \mathrm{div}\left(\underline{\vec{E}}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\left(i\omega + \frac{\underline{\gamma}}{\varepsilon_0}\right)\underline{\rho} = 0}$$

Comme la partie réelle de $\underline{\gamma}$ est non nulle, le terme entre parenthèses ne peut pas s'annuler. L'équation de conservation de la charge impose donc forcément $\underline{\rho} = 0$, c'est-à-dire que la densité volumique de charge reste nulle à haute fréquence. Ce résultat est vrai car on est en régime sinusoïdal forcé, pas en régime transitoire.

3) Écrire les équations de Maxwell complexes dans le métal pour une OPPH quelconque.

Correction

Équations de Maxwell en complexe :

$$-i\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \qquad\qquad -i\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$$

$$-i\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}} \qquad\qquad -i\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0\left(\underline{\gamma} + i\omega\varepsilon_0\right)\underline{\vec{E}}$$

4) Établir la relation de dispersion.

Correction

Pour établir la relation de dispersion, compte tenu de la formule donnée, il semble incontournable de prendre le produit vectoriel d'une des équations de Maxwell en rotationnel avec $\underline{\vec{k}}$ afin de faire apparaître $\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{k}} = \underline{k}^2$. D'une part, en utilisant le double produit vectoriel,

$$\underline{\overrightarrow{k}} \wedge \left(\underline{\overrightarrow{k}} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dvpt}}}{=} \left(\underline{\overrightarrow{k}} \cdot \underline{\overrightarrow{E}}\right) \underline{\overrightarrow{k}} - \left(\underline{\overrightarrow{k}} \cdot \underline{\overrightarrow{k}}\right) \underline{\overrightarrow{E}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MG}}}{=} -\underline{k}^2 \, \underline{\overrightarrow{E}}$$

et d'autre part, avec l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\underline{\overrightarrow{k}} \wedge \left(\underline{\overrightarrow{k}} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MF}}}{=} \omega \underline{\overrightarrow{k}} \wedge \underline{\overrightarrow{B}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MA}}}{=} \left(i\mu_0 \underline{\gamma} \omega - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \underline{\overrightarrow{E}}$$

On peut alors identifier ces deux expressions,

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0 \underline{\gamma} \omega}$$

5) En déduire que, pour un domaine de pulsation à préciser, l'onde peut être transmise au travers du métal sans être absorbée.

Correction

En remplaçant $\underline{\gamma}$ par son expression, la relation de dispersion s'écrit :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{1 + i\omega\tau}$$

Pour que l'onde soit transmise sans absorption, il faut que $\underline{k}^2$ soit réel positif.

Si $\omega \gg 1/\tau = 10^{14}$ rad $\cdot$ s^{-1}, alors la partie imaginaire est nulle :

$$\underline{k}^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2} - i\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{i\omega\tau} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 \gamma_0}{\tau}$$

Enfin, $\underline{k}^2$ est réel positif si :

$$\omega > c\sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0}{\tau}} = 2 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Cette deuxième condition est plus contraignante que la première.

6) Expliquer le titre de l'exercice.

Correction

La longueur d'onde à partir de laquelle la deuxième condition devient valable s'écrit :

$$\frac{2\pi c}{\lambda} > c\sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad \lambda < 2\pi\sqrt{\frac{\tau}{\mu_0 \gamma_0}} = 80 \text{ nm}$$

C'est bien à partir du domaine des ultra-violets que le métal devient transparent.